

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

Željko Vrcan

**PRILOG ISTRAŽIVANJU NOSIVOSTI  
UNUTARNJEG EVOLVENTNOG  
OZUBLJENJA S VELIKIM STUPNJEM  
PREKRIVANJA PROFILA**

DOKTORSKI RAD

Rijeka, 2014.



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

Željko Vrcan

**PRILOG ISTRAŽIVANJU NOSIVOSTI  
UNUTARNJEG EVOLVENTNOG  
OZUBLJENJA S VELIKIM STUPNJEM  
PREKRIVANJA PROFILA**

DOKTORSKI RAD

Mentor: prof. dr. sc. Neven Lovrin, dipl. ing.

Komentor: doc. dr. sc. Robert Basan, dipl. ing.

Rijeka, 2014.



UNIVERSITY OF RIJEKA  
FACULTY OF ENGINEERING

Željko Vrcan

**A CONTRIBUTION TO THE RESEARCH  
OF THE LOADING CAPACITY OF  
INTERNAL INVOLUTE HIGH CONTACT  
RATIO GEARS**

DOCTORAL THESIS

Rijeka, 2014.



Sveučilište u Rijeci  
**TEHNIČKI FAKULTET**  
-Fakultetsko vijeće-  
Klasa: 602-04/08-02/20  
Ur. br.: 2170-57-43-08-43  
Rijeka, 29. rujna 2008.

Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na svojoj 20. sjednici u akad. god. 2007./08./09./10., održanoj 26. rujna 2008., donijelo je sljedeću

## O D L U K U

Sukladno izvješću Stručnog povjerenstva, u sastavu: red. prof. dr. sc. Božidar Križan, izv. prof. dr. sc. Neven Lovrin i izv. prof. dr. sc. Petar Rakamarić te pozitivne ocjene prijave i obrane teme doktorskog rada, utvrđuje se da pristupnik **Željko Vrcan, dipl. ing.** ispunjava Zakonom propisane uvjete za prijavu i izradu teme doktorske disertacije naslovljene:

*„Prilog istraživanju nosivosti unutarnjeg evolventnog ozubljenja s velikim stupnjem prekrivanja profila“*

Mentorom se imenuje izv. prof. dr. sc. Nevena Lovrina.



Dekan

Prof. dr. sc. Tonči Mikac, mag. ing. mech.

Dostaviti:

1. Željko Vrcan, dipl. ing.
2. Mentor, izv. prof. dr. sc. Neven Lovrin
3. Služba studentske evidencije, ovdje
4. Pismohrana FV



Sveučilište u Rijeci  
**TEHNIČKI FAKULTET**  
-Fakultetsko vijeće-

KLASA: 030-09/10-01/01  
URBROJ: 2170-57-01-10-25  
Rijeka, 29. listopada 2010.

Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na svojoj 1. sjednici u ak. god. 2010./11., održanoj 29. listopada 2010., donijelo je sljedeću

### **O D L U K U**

Prihvata se prijedlog mentora izv. prof. dr. sc. Nevena Lovrina te uz suglasnost voditelja poslijediplomskog doktorskog studija red. prof. dr. sc. Vladimira Medice, imenuje se doc. dr. sc. Robert Basan za sumentora znanstvenom novaku Željku Vrcanu na izradi doktorske disertacije naslovljene: *Prilog istraživanju nosivosti unutarnjeg evolventnog ozubljenja s velikim stupnjem prekrivanja profila.*

Dekan:



Dostaviti:

- 1.) Izv. prof. dr. sc. Neven Lovrin
- 2.) Prof. dr. sc. Vladimir Medica
- 3.) Doc. dr. sc. Robert Basan
- 4.) Željko Vrcan, zn. novak
- 5.) Služba studentske evidencije
- 6.) Opća i kadrovska služba
- 7.) Pismohrana FV



Mentor rada: prof. dr. sc. Neven Lovrin

Komentor rada: doc. dr. sc. Robert Basan

Doktorski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ u/na \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_, pred povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

4. \_\_\_\_\_

5. \_\_\_\_\_



# Predgovor

Neke planetne prijenosnike nije moguće konstruirati bez zupčanika s unutarnjim ozubljenjem te je za te zupčanike potreban odgovarajući proračun nosivosti korijena i boka zuba. Zbog toga se u sklopu istraživanja znanstvenog projekta 069-0692195-1796, „Materijali, trajnost i nosivost suvremenih zupčastih prijenosnika“ pojavila potreba za izračunavanjem nosivosti zupčanika s unutarnjim ozubljenjem i velikim stupnjem prekrivanja profila.

Zahvaljujem glavnom istraživaču projekta, prof. dr. sc. Božidaru Križanu na povjerenu koje mi je iskazao primanjem na znanstveni projekt.

Mentorima prof. dr. sc. Nevenu Lovrinu i doc. dr. sc. Robertu Basanu zahvaljujem za vodstvo, iskazanu pomoć, podršku i savjete prilikom izrade ovog rada.

Zahvaljujem prof. dr. sc. Gordani Marunić za pruženu pomoć prilikom prikupljanja literature. Posebno zahvaljujem g. Milanu Perkoviću iz tvrtke „JLM Perković“ u Matuljima na izradi fotoelastičnih modela bez kojih istraživanje provedeno u sklopu ovog rada ne bi bilo potpuno. Zahvaljujem i prof. dr. sc. Milanu Opaliću s Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu te prof. dr. sc. Damiru Jelaski s Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu na omogućenom mi stručnom usavršavanju tokom izrade ovog rada.

Na kraju, želim posebno zahvaliti svojoj obitelji za beskrajno strpljenje i bezuvjetnu podršku.



## Sažetak

U ovom radu istraženo je naprezanje na boku i u korijenu zuba zupčanika s ravnim unutarnjim evolventnim ozubljenjem s velikim stupnjem prekrivanja profila (UVPP) i geometrijski točnim profilom zuba. Detaljno je istražena geometrija UVPP ozubljenja te su utvrđene vrijednosti parametara geometrije ozubljenja potrebne kako bi se izbjegle smetnje u zahvatu zupčanika te pogreške oblika boka zuba zupčanika nastale tijekom izrade. Istražen je utjecaj parametara geometrije UVPP ozubljenja na nosivost ozubljenja te su dane preporuke za izbor najpovoljnijih vrijednosti parametara geometrije za postizanje što većeg stupnja prekrivanja profila ozubljenja. Prikazan je postupak proračuna naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika prema normi ISO 6336 te je ustanovljeno da vrijednosti dobivene tim postupkom znatno odstupaju od stvarnih. Razmotren je točniji postupak proračuna naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. Naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika UVPP zupčanog para eksperimentalno su ispitana metodom fotoelasticimetrije. Rezultati tog ispitivanja upotrijebljeni su za verifikaciju rezultata dobivenih numeričkom analizom putem metode konačnih elemenata. Na temelju rezultata numeričke analize metodom konačnih elemenata utvrđena je raspodjela sile u toku zahvata UVPP zupčanog para. Predložene su izmjene izraza za proračun naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika navedenih u normi ISO 6336 za slučaj UVPP ozubljenja te je predložen točniji i jednostavniji način proračunavanja naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika u odnosu na normu ISO 6336.



## Summary

This work deals with the investigation of tooth root and tooth flank stresses of internal involute spur high contact ratio gears (IHCR) having an geometrically accurate profile. The geometry of IHCR gears has been thoroughly researched in order to avoid meshing errors as well as tooth shape errors created during gear shaping. The influence of IHCR gear geometry on the loading capacity of IHCR gears has been researched and recommendations have been made to make correct selections of gear geometry parameter values in order to achieve a transverse contact ratio as high as possible. An overview of tooth root and tooth flank stress calculations according to ISO 6336 has been given and it was determined that the values obtained by using this calculation considerably differ from actual values. A more accurate procedure for the calculation of tooth root and tooth flank stresses of internal gears has been discussed. Photoelastic investigation has been used to determine the actual tooth root and flank stress of IHCR gears and the results have been used for the verification of the results obtained by means of the finite element method. Numerical analysis by finite element method has been used to determine the actual load distribution during the mesh of a IHCR gear pair. Modifications to the expressions for the calculation of tooth root and tooth flank stresses according to ISO 6336 in the case of IHCR gears have been suggested as well as a simpler and more accurate procedure for the calculation of IHCR gear tooth root and tooth flank stresses in relation to ISO 6336.



## Ključne riječi / Keywords

Ključne riječi:

- naprezanje u korijenu zuba
- naprezanje na boku zuba
- unutarnje ozubljenje
- veliki stupanj prekrivanja profila
- proračun naprezanja
- fotoelastično ispitivanje

Keywords:

- tooth root stress
- tooth flank stress
- internal toothing
- high contact ratio
- stress calculation
- photoelastic investigation



# Kazalo

1. Uvod .....	1
1.1 Ishodište i značaj rada .....	1
1.2 Ocjena dosadašnjih istraživanja .....	3
1.3 Cilj i svrha istraživanja.....	5
1.4 Metodologija istraživanja .....	5
2. Analiza geometrije UVPP ozubljenja .....	7
2.1 Posebnosti unutarnjeg ozubljenja.....	7
2.2 Posebnosti ozubljenja s kosim zubima.....	13
2.3 Utjecaj parametara geometrije na stupanj prekrivanja profila UVPP ozubljenja s ravnim zubima.....	16
2.4 Utjecaj kuta nagiba zuba na parametre UVPP ozubljenja s kosim zubima.....	21
3. Proračun naprezanja u ozubljenju prema normi ISO 6336 .....	29
3.1 Proračun naprezanja na boku zuba prema normi ISO 6336-2.....	29
3.2 Proračun naprezanja u korijenu zuba prema normi ISO 6336-3 .....	33
4. Proračun naprezanja i deformacija zuba UVPP ozubljenja.....	41
4.1 Prijelazna krivulja korijena zuba s unutarnjim ozubljenjem.....	41
4.2 Proračun naprezanja u korijenu zuba unutarnjeg ozubljenja prema [48], [49], [52].....	45

---

4.3 Proračun elastične deformacije zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.....	51
4.4 Određivanje raspodjele sile na parove zuba u zahvatu .....	56
4.5 Proračun naprezanja na boku zuba s unutarnjim ozubljenjem .....	59
4.6 Računalni proračun naprezanja u korijenu i na boku zuba .....	62
5. Numerički model za analizu metodom konačnih elemenata.....	73
5.1 Geometrijski modeli zupčanika.....	73
5.2 Mreža konačnih elemenata.....	74
5.3 Rubni uvjeti .....	77
6. Ispitivanje modela zupčanika metodom fotoelasticimetrije.....	79
6.1 Materijal modela zupčanika za ispitivanje metodom fotoelasticimetrije .....	80
6.2 Oprema za ispitivanje metodom fotoelasticimetrije.....	82
7. Verifikacija predloženog postupka numeričke analize (MKE)	
metodom fotoelasticimetrije.....	84
7.1 Parametri geometrije modela zupčanika za ispitivanje metodom fotoelasticimetrije ....	84
7.2 Fotoelastično ispitivanje modela zupčanika.....	85
7.3 Uspoređivanje rezultata fotoelastičnog ispitivanja s rezultatima metode konačnih elemenata.....	91
8. Analiza promjene naprezanja tijekom zahvata zupčanih parova .....	96
8.1 Zupčani parovi za analizu metodom konačnih elemenata .....	96
8.2 Rezultati analize raspodjele sile tijekom zahvata zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem provedene metodom konačnih elemenata.....	99
8.3 Rezultati analize promjene naprezanja u korijenu zuba zupčanika zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata, provedene metodom konačnih elemenata.....	109
8.4 Rezultati analize promjene naprezanja na boku zuba zupčanika zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata, provedene metodom konačnih elemenata.....	127

---

8.5 Usporedba vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem dobivenih putem metoda prikazanih u ovom radu .....	139
8.6 Usporedba vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem dobivenih putem metoda prikazanih u ovom radu .....	152
9. Zaključak .....	172
10. Popis literature.....	176
11. Popis oznaka i indeksa .....	183
12. Popis slika i tablica.....	190
13. Životopis.....	200



# 1. Uvod

## 1.1 Ishodište i značaj rada

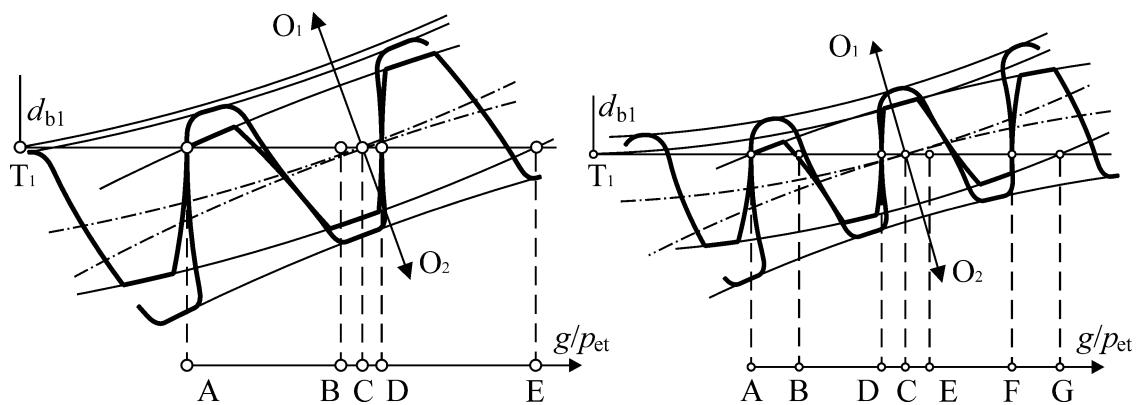
Suvremeni zupčani prijenosnik mora biti trajan i pouzdan u svim uvjetima rada. Napredak znanosti o konstruiranju omogućio je povećanje nosivosti uz istovremeno smanjivanje dimenzija i mase zupčanih prijenosnika. Klasični zupčani prijenosnici dosegli su stupanj razvoja kod kojeg daljnje povećanje nosivosti nije moguće bez povećanja mase prijenosnika ili upotrebe novih materijala. Rješenje je pronađeno u uvođenju planetnih prijenosnika, za čiju se konstrukciju osim zupčanika s vanjskim ozubljenjem koriste i zupčanici s unutarnjim ozubljenjem [44].

Evolventni zupčani parovi kod kojih je stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a < 2$  smatraju se parovima s niskim stupnjem prekrivanja profila (NPP) [5], [9], dok se evolventni zupčani parovi kod kojih je stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a > 2$  smatraju parovima s velikim stupnjem prekrivanja profila (VPP) [5], [9].

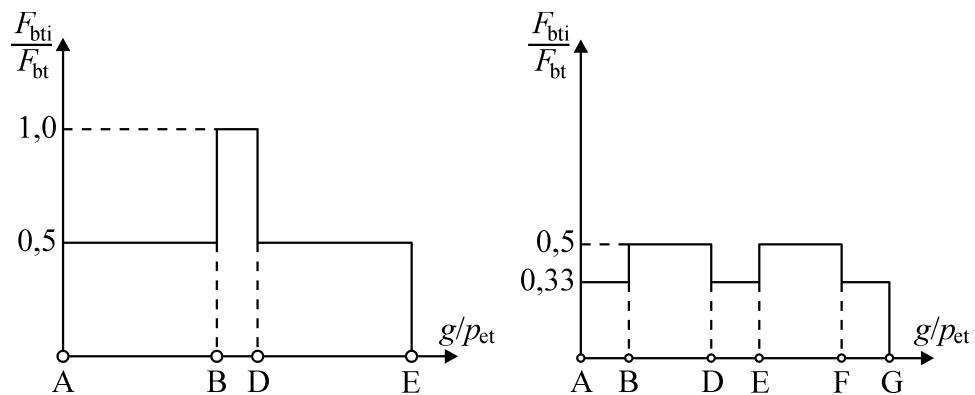
Nosivost NPP zupčanih parova (Slika 1.1, lijevo) ograničena je naizmjeničnim zahvatom jednog (interval B-D) i dva para zuba (intervali A-B i D-E). Kod zupčanih parova sa stupnjem prekrivanja profila  $\varepsilon_a > 2$ , uvijek su u zahvatu najmanje dva para zuba. U području stupnja prekrivanja profila  $2 < \varepsilon_a < 3$  izmjenjuju se intervali trostrukog (A-B, D-E, F-G) i dvostrukog zahvata zuba zupčanika (B-D i E-F) (Slika 1.1, desno). Time je osiguran miran rad uz smanjenu buku i vibracije te je značajno povećana nosivost zupčanika.

Svaki par geometrijski točnih i apsolutno krutih zuba VPP ozubljenja s  $2 < \varepsilon_a < 3$  opterećen je jednom trećinom ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u intervalima trostrukog zahvata, a u intervalima dvostrukog zahvata opterećen je polovicom ukupne sile  $F_{bt}$  (Slika 1.2, desno).

NPP zupčanici s geometrijski točnim i absolutno krutim zubima su u periodu dvostrukog zahvata opterećeni polovicom ukupne sile  $F_{bt}$ , a u periodu jednostrukog zahvata opterećeni su punom silom  $F_{bt}$  (Slika 1.2, lijevo). Zbog toga se uz ovakvu raspodjelu sile očekuje povećana nosivost i kod stvarnih VPP zupčanika s greškom profila zuba.



Slika 1.1 Zahvat zupčanika [35]. Lijevo: NPP zupčanici. Desno: VPP zupčanici.



Slika 1.2 Hipotetska raspodjela sile u zahvatu. Lijevo: NPP par. Desno: VPP par.

Bokovi zupčanika s unutarnjim ozubljenjem su unutarnji, konkavni dijelovi evolvente.

Pri međusobnom nalijeganju konkavnog boka zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem i konveksnog boka zupčanika s vanjskim ozubljenjem, kontaktna naprezanja su manja nego kod konveksno-konveksnog nalijeganja bokova zuba u zahvatu zupčanog para s vanjsko-vanjskim ozubljenjem. Zbog toga je nosivost boka takvih zupčanih parova povećana [37].

Zupčanici zupčanog para s vanjsko-unutarnjim ozubljenjem sprežu se u istom smjeru pa su uvjeti klizanja bolji nego kod zupčanih parova s vanjsko-vanjskim ozubljenjem. Zupčani parovi s vanjsko-unutarnjim ozubljenjem zauzimaju manje prostora nego zupčani parovi s vanjskim ozubljenjem jer se zupčanik s vanjskim ozubljenjem nalazi unutar zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. Vanjska površina zupčanika s unutarnjim ozubljenjem može biti

oblikovana kao neki drugi strojni element, a može biti i stacionarni dio kućišta kod planetnih prijenosnika.

Zbog navedenoga, VPP zupčanici se primjenjuju u visoko opterećenim prijenosnicima snage kod kamiona, brodova, zrakoplova i helikoptera [62], [42], [72], a zbog jednoličnog rada bez buke i vibracija [8] koriste se u osobnim automobilima [69].

Zbog većeg broja zuba u zahvatu nego kod NPP zupčanika, VPP zupčanici bolje podnose udarna opterećenja u radu [77], [15], [68].

Primjena VPP ozubljenja ima i određene nedostatke. Gubici trenja u zahvatu zuba VPP zupčanika su povećani u odnosu na gubitke kod NPP ozubljenja zbog pogoršanog omjera klizanja i kotrljanja bokova zuba u toku zahvata [2], [26], [27], [41], [75]. Za izradu VPP zupčanika potrebna je veća točnost izrade nego kod NPP zupčanika, kako bi se osigurala ispravnost višestrukog zahvata zuba zupčanika [43], a time je veća i cijena izrade ovih zupčanika.

## 1.2 Ocjena dosadašnjih istraživanja

U normi DIN 3990 [11] VPP ozubljenje nije detaljno obrađeno, a nije ni definirana raspodjela sile na parove zuba VPP zupčanika u tijeku zahvata. Norma DIN 3990 [11] predviđa primjenu istih izraza za proračun nosivosti NPP i VPP zupčanika, pri čemu se naglašava da će VPP zupčanici biti predimenzionirani. Norma ISO 6336 [22] preuzima izraze za proračun nosivosti zuba zupčanika iz norme DIN 3990, također bez točnog definiranja raspodjele sile na parove zuba VPP zupčanika u tijeku zahvata. U [55] računa se nosivost VPP ozubljenja pomoću računalnog programa koji je verificiran tenzometrijskim ispitivanjem čeličnog modela, a slično istraživanje provedeno je i u radovima [54], [13]. U radu [14] istražena je raspodjela sile u zahvatu VPP zupčanika, a rezultati tog istraživanja su aproksimativni zbog utvrđenih odstupanja od 30 % u odnosu na rezultate dobivene putem metode konačnih elemenata. U radu [3] analizirana su naprezanja u korijenu zuba NPP zupčanika s unutarnjim i vanjskim ozubljenjem ispitivanjem metodom fotoelasticimetrije. Rezultati fotoelastičnog ispitivanja modela su uspoređeni s rezultatima dobivenim putem metode konačnih elemenata te je ustanovljeno dobro podudaranje rezultata.

U istraživanju [66] predstavljena je metoda za određivanje elastične deformacije zuba putem dvodimenzionalne teorije elastičnosti i izvedeni su izrazi za praktično izračunavanje elastične deformacije zuba. Ti izrazi su primjenjeni u [32] i kasnije [33] pri čemu je ustanovljeno da je

primjenom VPP ozubljenja moguće značajno povećati nosivost zupčanog para u odnosu na NPP ozubljenje. Rad [33] nije praćen eksperimentalnom ili numeričkom potvrdom rezultata. Istraživanje je nastavljeno u [35], uz analizu geometrije VPP ozubljenja, pri čemu su dobivene praktično primjenjive formule za proračun nosivosti VPP ozubljenja korištenjem izraza iz [73]. Rezultati istraživanja iz [35] verificirani su fotoelastičnim ispitivanjem i numeričkom analizom. U radu [17] analiziran je utjecaj odstupanja koraka na zahvatnoj crti na raspodjelu sile u zahvatu evolventnih zupčanika s vanjskim ozubljenjem za zupčanike sa stupnjem prekrivanja  $1 < \varepsilon_a < 2$  te za zupčanike sa stupnjem prekrivanja  $2 < \varepsilon_a < 3$ . Tim istraživanjem je potvrđeno da se očekivano povećanje nosivosti VPP ozubljenja u odnosu na standardno evolventno ozubljenje može postići isključivo uz visoku točnost izrade VPP zupčanika (stupanj točnosti izrade 5 ili manji).

Norma ISO 6336 [22] unutarnje ozubljenje smatra posebnim slučajem vanjskog ozubljenja, što ima za posljedicu aproksimacije koje bitno utječu na točnost rezultata. U radu [49] provedena je analiza naprezanja u korijenu zuba zupčanika unutarnjeg ozubljenja primjenom dvodimenzionalne teorije elastičnosti i razvijen je postupak za izračunavanje koordinata točaka na prijelaznoj krivulji korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. Dobiveni rezultati uspoređeni su s rezultatima dobivenim putem metode konačnih elemenata (MKE) i rezultatima dobivenim putem fotoelastičnih ispitivanja te je ustanovljeno dobro podudaranje rezultata. Rad [48] predstavlja daljnju razradu rada [49], pri čemu su dobiveni izravno upotrebljivi izrazi za izračun naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. U radu [52] provedena su ispitivanja metodom konačnih elemenata te fotoelastična ispitivanja modela zupčanika s unutarnjim ozubljenjem, pri čemu je potvrđena ispravnost izraza iz [48]. U [52] je također utvrđeno da se točka najvećeg naprezanja na prijelaznoj krivulji korijena zuba unutarnjeg ozubljenja nalazi u točki u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zatvara kut od  $45^\circ$ . Analiza vrijednosti naprezanja u korijenu zuba unutarnjeg ozubljenja u [52] je pokazala da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba unutarnjeg ozubljenja izračunate prema ISO normama veće od stvarnih.

Korištenjem izraza i postupaka iz [48], u [51] je istražena elastična deformacija zuba unutarnjeg ozubljenja te je ustanovljeno da su dobivene vrijednosti u skladu s vrijednostima dobivenim putem MKE. Ustanovljeno je neznatno odstupanje od vrijednosti dobivenih putem izraza iz [73] i dani su izravno upotrebljivi izrazi za proračun deformacije zuba.

### 1.3 Cilj i svrha istraživanja

Na temelju navedenih nedostataka norme ISO 6336, kao cilj istraživanja u sklopu ovog rada postavljeno je pronalaženje točnijeg postupka proračuna nosivosti zupčanika s unutarnjim ozubljenjem i velikim stupnjem prekrivanja profila  $\varepsilon_a$  (UVPP) u rasponu  $2 < \varepsilon_a < 3$ . Sukladno rezultatima istraživanja predložit će se izmjene izraza za naprezanje u korijenu i na boku zuba zupčanika prema normi ISO 6336 [22] za UVPP zupčanike. Time će se dobiti točniji postupak za praktično proračunavanje nosivosti zuba UVPP zupčanika.

Ovaj rad upotpunjuje istraživanje nosivosti VPP zupčanika s vanjskim ozubljenjem provedeno u [35] i omogućuje potpuni proračun nosivosti UVPP zupčanih parova. Točniji proračun nosivosti zupčanika s velikim stupnjem prekrivanja profila omogućit će konstrukciju manjih i lakših zupčanih prijenosnika bez ugrožavanja njihove nosivosti.

### 1.4 Metodologija istraživanja

Provedeno je detaljno istraživanje geometrije UVPP ozubljenja kako bi se utvrdili parametri geometrije ozubljenja potrebni za izbjegavanje smetnji u zahvatu te pogrešaka oblika boka zupčanika nastalih prilikom izrade zupčanika. U nastavku je analiziran utjecaj parametara geometrije UVPP ozubljenja na stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a$ . Dane su preporuke za izbor najpovoljnijih vrijednosti geometrije ozubljenja za postizanje što većeg stupnja prekrivanja, a time i povećanja nosivosti ozubljenja.

Prikazan je proračun naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika prema normi ISO 6336 [22]. Pri tome je istraženo koliko taj postupak proračuna vodi računa o razlikama između VPP i NPP ozubljenja te razlikama između unutarnjeg i vanjskog ozubljenja. Utvrđeno je da proračun prema normi ISO 6336 koristi aproksimacije koje bitno utječu na dobivene rezultate. Zbog toga je analiziran i prikazan proračun naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema [49], [48], [52] i proračun naprezanja na boku zuba prema [44], [73]. Analizom proračuna naprezanja u korijenu zuba unutarnjeg zupčanika prema [49], [48], [52] i proračuna naprezanja na boku zuba prema [44], [73] utvrđeno je da su ovi postupci proračuna dobro prilagođeni unutarnjem ozubljenju te razlikama između VPP i NPP ozubljenja. Ove postupke proračuna bilo je potrebno verificirati.

Vrijednosti naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika UVPP zupčanog para eksperimentalno su određene metodom fotoelasticimetrije. Rezultati tog ispitivanja

upotrijebljeni su za verifikaciju rezultata numeričke analize putem metode konačnih elemenata.

Tijekom ovih ispitivanja pretpostavljeno je da je profil zuba neopterećenog zupčanika geometrijski apsolutno točan i da je vijenac modela zupčanika s unutarnjim ozubljenjem zadovoljavajuće debljine. Time je izbjegnuto pomicanje točke najvećeg naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem s prijelazne krivulje korijena na kružnicu korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem [50], [47].

Za potrebe numeričke analize putem MKE, modeli zupčanika diskretizirani su mrežom konačnih elemenata, pri čemu je modeliran i kontakt između zupčanika u toku zahvata. Utvrđena je teoretska raspodjela sile u toku zahvata zuba zupčanika UVPP zupčanog para, naprezanje u korijenu zuba zupčanika UVPP zupčanog para i naprezanje na boku zuba zupčanika UVPP zupčanog para.

Rezultati numeričke analize uspoređeni su s vrijednostima naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika UVPP zupčanog para dobivenim korištenjem norme ISO 6336 [22], s vrijednostima naprezanja u korijenu zuba zupčanika UVPP zupčanog para dobivenih putem [49], [48], [52] i vrijednostima naprezanja na boku zuba UVPP zupčanog para dobivenih putem [44], [73].

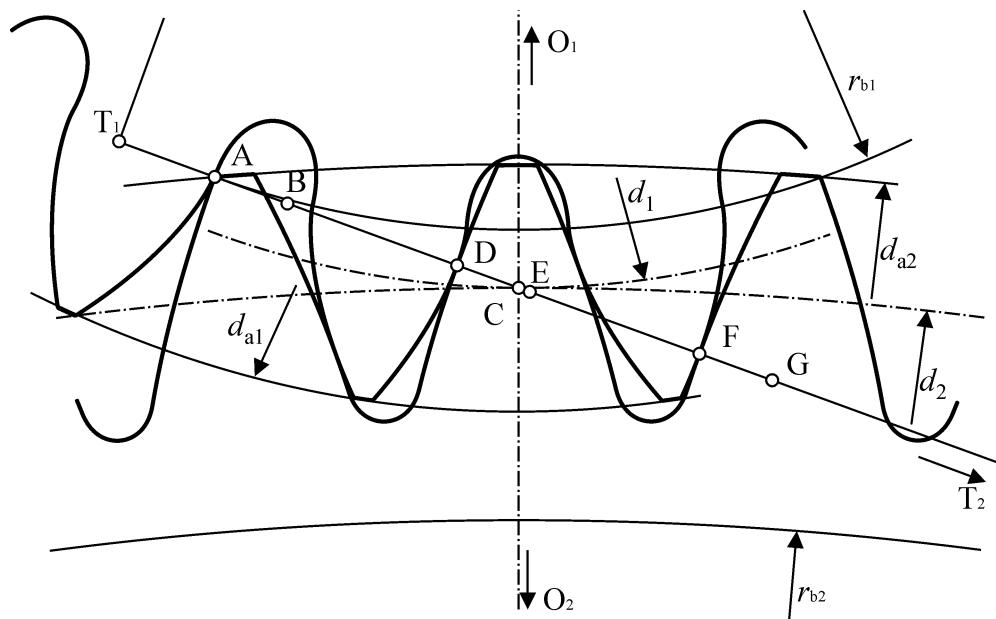
U skladu s ciljem istraživanja, uspoređivanjem tih rezultata potvrđena je primjenjivost proračuna prema [49], [48], [52] za proračun naprezanja u korijenu zuba UVPP zupčanika i primjenjivost proračuna prema [44], [73] za naprezanje na boku zuba UVPP zupčanika.

Zbog relativne složenosti ovih proračuna, utvrđene su i predložene izmjene izraza prema normi ISO 6336 [22], kojima se povećava točnost tih izraza kod praktičnog proračunavanja nosivosti zuba UVPP zupčanika.

## 2. Analiza geometrije UVPP ozubljenja

### 2.1 Posebnosti unutarnjeg ozubljenja

Evolventno VPP ozubljenje (Slika 2.1) se definira kao nestandardni oblik evolventnog ozubljenja sa stupnjem prekrivanja profila  $\varepsilon_a \geq 2$ .



Slika 2.1 VPP zupčani par s vanjskim ozubljenjem [35]

Za razliku od NPP zupčanih parova, kod kojih se izmjenjuju periodi jednostrukog i dvostrukog zahvata, kod VPP zupčanih parova su uvejk barem dva para zuba u zahvatu pa se kod ovih zupčanika s  $2 < \varepsilon_a < 3$  izmjenjuju periodi trostrukog (A-B, D-E, F-G) i dvostrukog zahvata (B-D i E-F) (Slika 2.1).

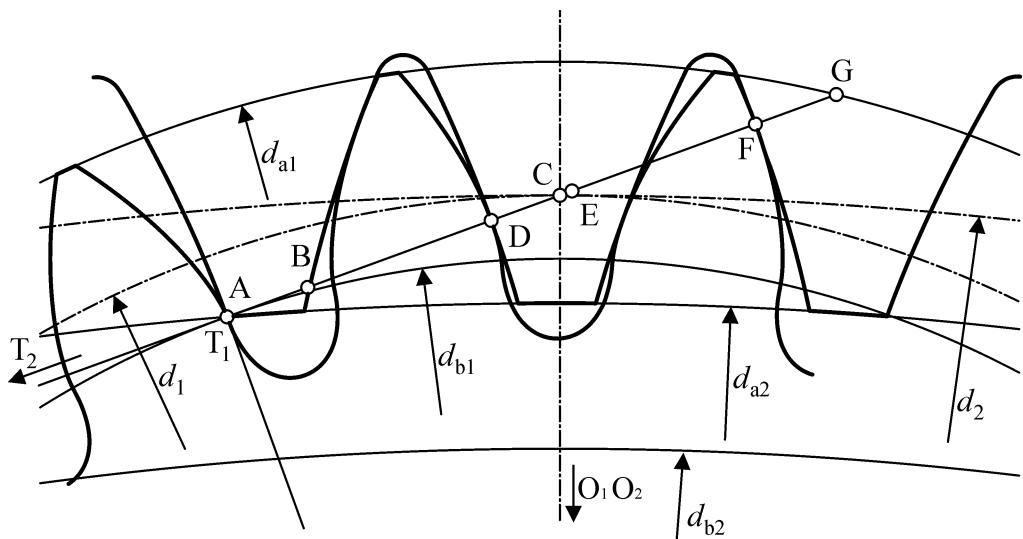
Općenito, stupanj prekrivanja profila  $2 < \varepsilon_a < 3$  ostvaruje se uz faktor visine glave zuba alata  $h_{a0}^* > 1,25$ , a može se ostvariti i primjenom zahvatnog kuta  $14^\circ \leq \alpha_n < 20^\circ$ , kao i njihovom kombinacijom, uz smanjene faktore tjemene zračnosti  $c_{01,2}^* \geq 0,1$ .

VPP ozubljenje se zbog povećane visine zuba ( $h_{a0}^*$  > 1,5) u odnosu na NPP ozubljenje još naziva i „visoko ozubljenje“. Međutim, pogodnim izborom zahvatnog kuta  $\alpha_n$  može se postići stupanj prekrivanja  $\varepsilon_a > 2$  kod zupčanika uobičajene visine, kao i stupanj prekrivanja  $\varepsilon_a < 2$  kod visokih zupčanika [30]. Nadalje, stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a > 2$  moguće je postići uz zahvatni kut  $\alpha = 20^\circ$  i korištenje standardnih alata za izradu zupčanika uz negativne faktore pomake profila u rasponu  $-0,5 < x_1, x_2 < -0,4$  [56].

Zbog povećane visine zuba postoji opasnost od nepravilnosti u zahvatu zbog elastičnih deformacija u toku zahvata, tako da se VPP zupčanici moraju izrađivati s povećanom preciznošću uz što manja odstupanja koraka zahvata  $p_{et}$ .

Ukoliko u tekstu nije posebno naglašeno, pretpostavlja se da se govori o zupčanicima s ravnim zubima za koje vrijedi  $\beta = 0^\circ$ ,  $\alpha = \alpha_n$ ,  $m = m_n$ .

Bokovi zupčanika s unutarnjim ozubljenjem (Slika 2.2) su unutarnji, konkavni dijelovi evolvente.

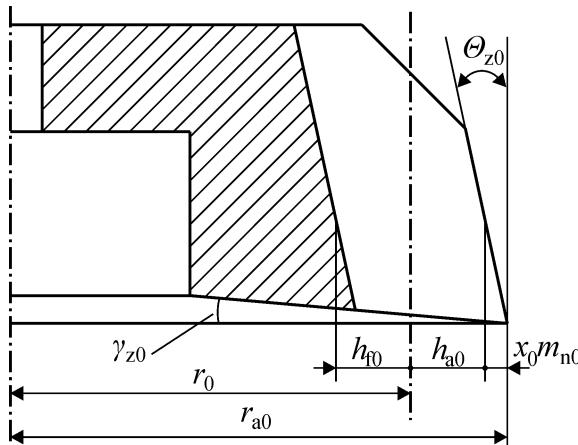


Slika 2.2 VPP zupčani par s unutarnjim ozubljenjem [37]

Pri međusobnom nalijeganju konkavnog boka zupčanika s unutarnjim ozubljenjem i konveksnog boka zupčanika s vanjskim ozubljenjem, kontaktna naprezanja su manja nego kod konveksno-konveksnog dodira zupčanog para s vanjskim ozubljenjem, zbog čega je nosivost boka ovakvih zupčanih parova veća.

Zupčanike s unutarnjim ozubljenjem moguće je izraditi profilnim glodalom, reznim zupčanikom, specijalnim pužnim glodalom [40] i alatom za provlačenje. Od svih ovih postupaka se najčešće koristi izrada reznim zupčanikom, budući da su ti alati lako dostupni.

Teoretski gledano, izrada unutarnjeg ozubljenja reznim zupčanikom je vrlo slična zahvatu zupčanika s unutarnjim i vanjskim ozubljenjem [31], no kako rezni zupčanik (Slika 2.3) mora biti oblikom prilagođen izradi ozubljenja, jedino što mora imati zajedničko sa zupčanicom sa vanjskim ozubljenjem su modul reznog zupčanika  $m_{n0}$  i zahvatni kut reznog zupčanika  $\alpha_0$  [64].



Slika 2.3 Geometrija reznog zupčanika prema [64].

Kod izrade unutarnjeg ozubljenja mogu se pojaviti tri osnovne smetnje: interferencija vrha, interferencija trohoide te interferencija prilikom primicanja i odmicanja alata.

Do interferencije vrha (Slika 2.4, lijevo) dolazi kada se vrh glave zuba zupčanika nađe ispod temeljnog kruga alata, zbog čega korijen alata odsijeca vrh glave zuba zupčanika.

Za izbjegavanje ove smetnje potrebno je prilagoditi geometriju ozubljenja (Slika 2.4, desno) uvjetu

$$r_a \geq |\overline{O_z B}|. \quad (2.1)$$

Uvrštavanjem pomoćnih vrijednosti prema slici 2.4 izraz (2.1) prelazi u oblik

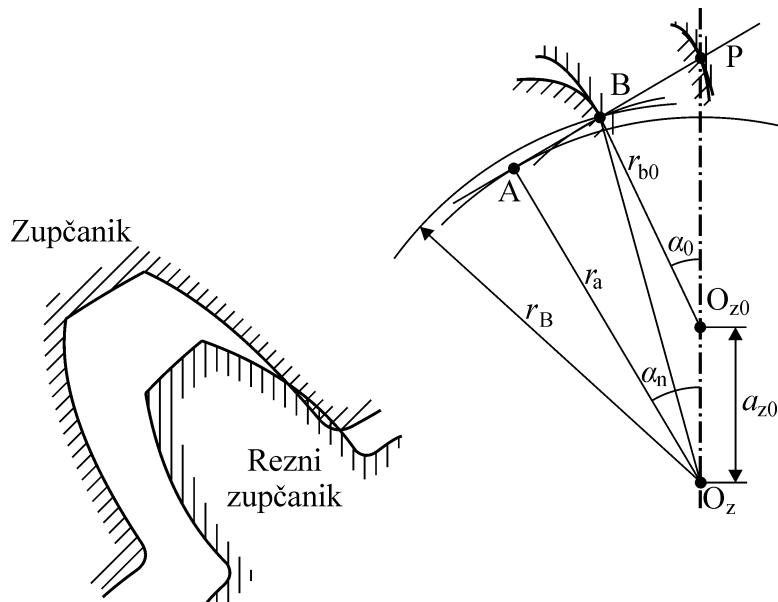
$$r_a \geq \sqrt{(a_{z0} \sin \alpha_n)^2 + r_b^2}. \quad (2.2)$$

Pomoćne vrijednosti određuju se prema slici 2.4:

$$a_{z0} = \frac{m_n(z - z_0)}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_n}, \quad (2.3)$$

$$r_a = \frac{m_n z}{2} - m_n - xm_n, \quad (2.4)$$

$$\operatorname{inv} \alpha_n = \operatorname{inv} \alpha_0 + 2 \frac{x - x_0}{z - z_0} \tan \alpha_0. \quad (2.5)$$



Slika 2.4 Lijevo: prikaz interferencije vrha. Desno: geometrijsko objašnjenje interferencije vrha.

Ukoliko vrh alata u svom gibanju po trohoidi pretegne vrh zupčanika u gibanju po kružnici tijekom posmaka, dolazi do interferencije trohoide (Slika 2.5, lijevo). Tada dolazi do otkidanja vrha i dijela boka zuba zupčanika, što se izbjegava prilagodavanjem geometrije ozubljenja izrazu

$$\theta_z - (\operatorname{inv} \alpha_n - \operatorname{inv} \alpha_a) \geq \theta_0 + (\operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_n) \frac{z_0}{z}. \quad (2.6)$$

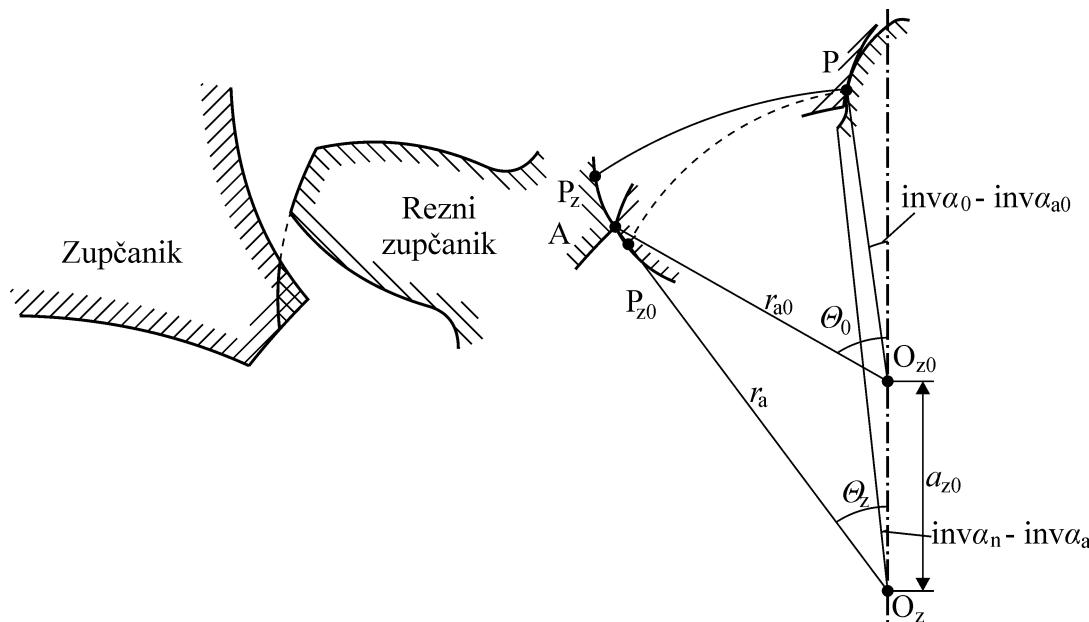
Pomoćne vrijednosti određuju se prema slici 2.5:

$$\theta_z = \arccos\left(\frac{a_{z0}^2 + r_a^2 - r_{a0}^2}{2a_{z0}r_a}\right), \quad (2.7)$$

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{r_a^2 - r_{a0}^2 - a_{z0}^2}{2a_{z0}r_a}\right), \quad (2.8)$$

$$\alpha_a = \arccos\left(\frac{r_b}{r_a}\right), \quad (2.9)$$

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{r_{b0}}{r_{a0}}\right). \quad (2.10)$$



Slika 2.5 Lijevo: prikaz interferencije trohoide. Desno: geometrijsko objašnjenje interferencije trohoide.

Radijalni pomak alata izaziva interferenciju prilikom primicanja i odmicanja alata (Slika 2.6, lijevo), pri čemu dolazi do otkidanja vrha glave zuba. Ova smetnja se izbjegava tako da se izborom geometrije zupčanika osigura da za bilo koju zajedničku točku P u tijeku dodira bokova zuba zupčanika i alata za bilo koji kut zakretanja rezognog zupčanika  $\theta_0$  vrijedi da je  $Y_z > Y_0$ , to jest da je udaljenost vrha glave zuba zupčanika  $Y_z$  od simetrale na kojoj leže središta zupčanika veća od udaljenosti vrha glave zuba rezognog zupčanika  $Y_0$  (Slika 2.6, desno).

Sukladno slici 2.6, potrebne vrijednosti izračunaju se putem izraza:

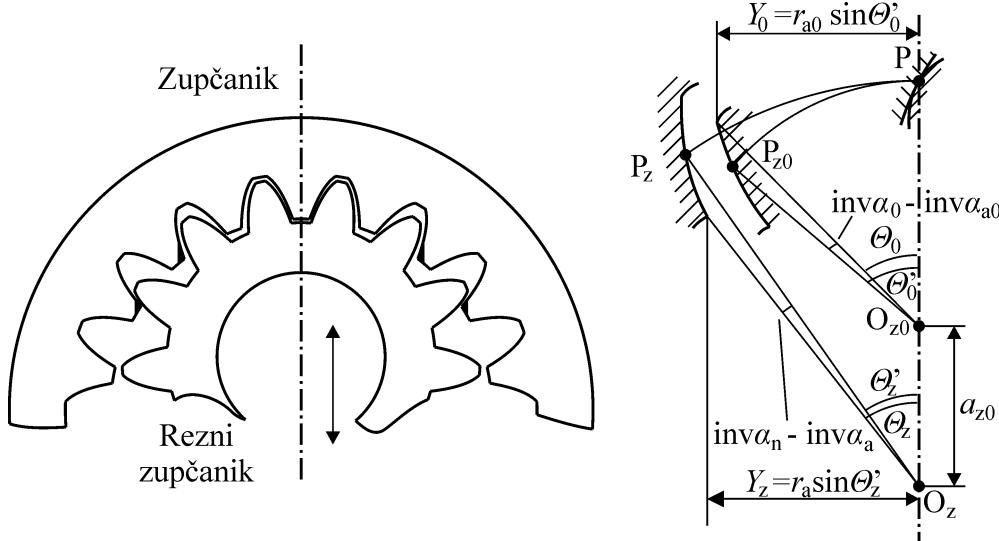
$$Y_0 = r_{a0} \sin \theta'_0, \quad (2.11)$$

$$\theta'_0 = \theta_0 - (\text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_n), \quad (2.12)$$

$$Y_z = r_a \sin \theta'_z, \quad (2.13)$$

$$\theta'_z = \theta_z - (\text{inv } \alpha_n - \text{inv } \alpha_a), \quad (2.14)$$

$$\theta_z = \theta_0 \frac{z}{z_0}. \quad (2.15)$$



Slika 2.6 Lijevo: interferencija prilikom primicanja i odmicanja alata. Desno: geometrijsko objašnjenje interferencije prilikom primicanja i odmicanja alata.

Kod nekih zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem dolazi do interferencije pri radikalnoj montaži zupčanika, što se može smatrati posebnim slučajem interferencije prilikom primicanja i odmicanja alata [31], [57]. U tom slučaju pribjegava se aksijalnoj montaži zupčanika.

U [64] se navodi da se smetnje prilikom izrade zupčanika mogu izbjegći odgovarajućim izborom broja zuba alata  $z_0$ , faktora pomaka profila alata  $x_0$  u odnosu na zupčanik, broja zuba zupčanika  $z$  te faktora pomaka profila zupčanika  $x$ . Tako će se smetnje kod zupčanika s vanjskim ozubljenjem izbjegći neovisno o pomaku profila za  $z_0 \geq 19$  i  $z \geq 18$ , dok će se za unutarnje ozubljenje isto postići za  $z_0 \geq 34$  i  $z \geq 70$ , što je i poštovano prilikom izbora zupčanih parova za potrebe ovog rada.

## 2.2 Posebnosti ozubljenja s kosim zubima

Zupčanici s kosim ozubljenjem su zupčanici kod kojih izvodnice evolventne površine bokova zatvaraju s izvodnicama temeljnog cilindra kut  $\beta_b$  [44], pri čemu se kut  $\beta_b$  definira kao kut nagiba zavojnice boka zuba na temeljnog krugu.

Prednost kosog ozubljenja je u tome što zubi ulaze postepeno u zahvat koji se širi s jednog prema drugom boku zuba [44], pri čemu se opterećenje dijagonalno širi preko bokova, zbog čega se povećava opteretivost zuba. Ozubljenje radi tiše od ozubljenja s ravnim zubima, no zahtijeva ležajeve koji mogu preuzeti aksijalnu silu u zahvatu.

Kod navođenja geometrijskih podataka za zupčanike s kosim ozubljenjem se umjesto kuta  $\beta_b$  navodi kut  $\beta$  koji je definiran kao kut nagiba boka zuba na diobenom krugu [44]. Kutovi nagiba na različitim promjerima zupčanika s kosim ozubljenjem nisu jednaki, no svima je zajednički uspon zavojnice  $P$ :

$$\tan \beta_b = \frac{2\pi r_b}{P}, \quad (2.16)$$

$$\tan \beta = \frac{2\pi r}{P}. \quad (2.17)$$

Kod zupčanika sa kosim zubima postoji razlika između koraka u normalnom presjeku  $p_n$  i koraka u čeonom presjeku  $p_t$ . Omjer ovih koraka istovremeno predstavlja i omjer modula u normalnom presjeku  $m_n$  i modula u čeonom presjeku  $m_t$

$$\cos \beta = \frac{p_n}{p_t} = \frac{m_n \pi}{m_t \pi} = \frac{m_n}{m_t}. \quad (2.18)$$

Također dolazi i do promjena u izrazu za diobeni promjer zupčanika

$$d = z \cdot m_t = z \frac{m_n}{\cos \beta}. \quad (2.19)$$

Kod kosog ozubljenja se izraz za stupanj prekrivanja  $\varepsilon_\gamma$  proširuje, te se sastoji od stupnja prekrivanja profila  $\varepsilon_a$  te stupnja prekrivanja koraka  $\varepsilon_b$  [44]

---

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta . \quad (2.20)$$

Stupanj prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta$  predstavlja omjer između duljine dodirnog luka boka zuba  $g_\beta$  i koraka u čeonom presjeku  $p_t$ , a dan je izrazom

$$\varepsilon_\beta = \frac{g_\beta}{p_t} = \frac{\frac{b \tan \beta}{1}}{\frac{m_n \pi}{\cos \beta}} = \frac{b \sin \beta}{m_n \pi} . \quad (2.21)$$

Širina zuba  $b$  može se prikazati kao funkcija diobenog promjera zupčanika  $d$  i faktora širine  $\psi_{bd}$ . Zbog toga se izraz (2.21) može napisati u obliku

$$\varepsilon_\beta = \frac{b \sin \beta}{m_n \pi} = \frac{d \psi_{bd} \sin \beta}{m_n \pi} = \frac{z m_n \psi_{bd} \sin \beta}{m_n \pi \cos \beta} = \frac{z \psi_{bd} \tan \beta}{\pi} . \quad (2.22)$$

Izraz za stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_\alpha$  zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{d_{al}^2 - d_{bl}^2} - \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} + 2a \sin \alpha_{tw}}{2 p_{et}} \quad (2.23)$$

uvrštavanjem izraza

$$d_a = m_n \left( \frac{z}{\cos \beta} + 2 h_{a0}^* \right), \quad (2.24)$$

$$d_b = \frac{m_n z}{\cos \beta} \cos \alpha_t, \quad (2.25)$$

$$\tan \alpha_t = \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}, \quad (2.26)$$

$$p_{et} = m_t \pi \cos \alpha_t = \frac{m_n \pi}{\cos \beta} \cos \alpha_t, \quad (2.27)$$

$$\sin \alpha_t = \frac{\frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \right)^2}}, \quad (2.28)$$

$$\cos \alpha_t = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \right)^2}}, \quad (2.29)$$

prelazi u oblik

$$\begin{aligned} \varepsilon_a = & \frac{\sqrt{(z_1 + 2h_{a0}^* \cos \beta)^2 - (z_1 \cos \alpha_t)^2}}{2\pi \cos \alpha_t} - \\ & - \frac{\sqrt{(z_2 + 2h_{a0}^* \cos \beta)^2 - (z_2 \cos \alpha_t)^2}}{2\pi \cos \alpha_t} + \\ & + (z_1 + z_2) \frac{\tan \alpha_t}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.30)$$

U ovom radu razmatraju se samo zupčanici bez pomaka profila pa u (2.30) vrijedi  $\alpha_t = \alpha_{tw}$ .

Analizom izraza (2.26) i (2.29) uz pretpostavku da je kut  $\alpha_n$  konstantan zaključuje se da s povećanjem kuta  $\beta$  dolazi do povećanja vrijednosti kuta  $\alpha_t$ , zbog čega se vrijednost stupnja prekrivanja profila  $\varepsilon_a$  smanjuje.

Uz pretpostavku da je modul u normalnom presjeku  $m_n$  konstantan, vrijednost stupnja prekrivanja koraka (2.21) raste s povećanjem kuta  $\beta$  i širine zupčanika  $b$ . Porast stupnja prekrivanja koraka zbog povećanja širine zupčanika  $b$  teoretski je neograničen. Daljinjom analizom putem (2.22) uočava se da stupanj prekrivanja koraka, osim o kutu  $\beta$ , ovisi i o broju zuba zupčanika  $z$  (obično vrijedi  $z = z_1$ ).

Stoga se može reći da će kod zupčanika s kosim zubima ukupni stupanj prekrivanja (2.30) biti veći nego kod zupčanika s ravnim zubima upravo zbog velikog povećanja stupnja prekrivanja koje se postiže kroz  $\varepsilon_\beta$ .

U praktičnoj primjeni kosog ozubljenja postoje određena ograničenja [44], [1], [39]. Kutovi  $\beta < 8^\circ$  ne koriste se jer su u tom slučaju prednosti primjene kosog ozubljenja neznatne. U općoj strojogradnji primjenjuju se kutovi  $8^\circ \leq \beta \leq 20^\circ$  te  $\beta = 30^\circ$  kod strelastih zupčanika, dok se u automobilskoj industriji, posebno kod uskih zupčanika, koriste kutovi  $\beta = 30^\circ$  i  $\beta = 45^\circ$ .

Što se tiče nosivosti zupčanika, ustanovljeno je da kutovi  $\beta \leq 30^\circ$  povoljno utječu na nosivost zupčanika [44], [39] zbog postepenog ulaženja zuba u zahvat te rasterećenih rubova površine boka zuba. Za kuteve  $\beta > 30^\circ$  nema daljnog poboljšanja nosivosti, jer dolazi do nejednolikog rasporeda opterećenja uzduž boka zuba, što je i prikazano u [22] putem izraza za faktor

nagiba boka zuba  $Y_\beta$ . Poželjno je postići vrijednost stupnja prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta \geq 1$ , dok je za miran rad velikih zupčanika (turbinski prijenosnici, glavni pogon brodova i sl.) potrebno postići  $\varepsilon_\beta \geq 5$  [44], [39].

U nastavku ovog rada provest će se analiza mogućih vrijednosti kuta nagiba boka zuba zupčanika  $\beta$  za VPP ozubljenje te utjecaj vrijednosti kuta nagiba boka zuba  $\beta$  na stupanj prekrivanja VPP zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem.

### **2.3 Utjecaj parametara geometrije na stupanj prekrivanja profila UVPP ozubljenja s ravnim zubima**

Utjecaj parametara geometrije ozubljenja [16] proučen je pomoću programa GearPac CX 3.5 [45] na varijacijama zupčanih parova s ravnim zubima. Podaci za zupčane parove [70] prikazani su u tablici 2.1. Parametri reznog zupčanika izabrani su tako da se izbjegne utjecaj geometrije reznog zupčanika na stupanj prekrivanja zupčanog para [64], [71].

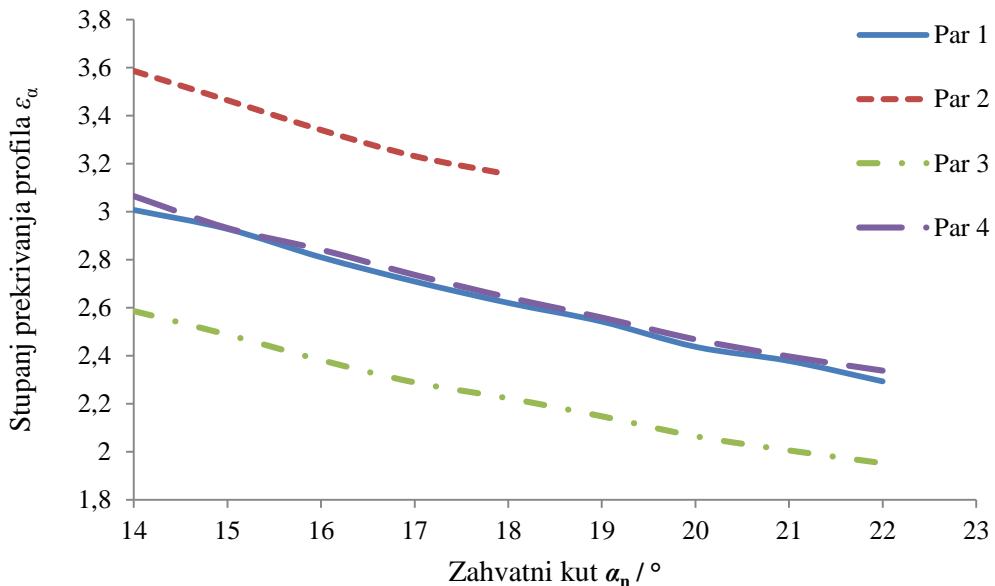
Tablica 2.1 Geometrijski podaci za zupčane parove s ravnim zubima [70]

Parametar	Par 1	Par 2	Par 3	Par 4
$z_2$	-140	-280	-350	-560
$m_n$	9 mm	20 mm	9 mm	13 mm
$\alpha_n$	$20^\circ$	$16^\circ$	$15^\circ$	$14^\circ$
$h_{a0}^*$	1,5	1,9	1,25	1,5
Zajednički podaci za sve parove				
$z_1$	70			
$x_1 = x_2$	0			
$\Sigma x$	0			
$\rho_{a0}^*$	0,1			
$z_0$	70			
$x_0$	0			

Slika 2.7 prikazuje utjecaj promjene zahvatnog kuta na stupanj prekrivanja profila. Rezultati su slični onima za parove s vanjskim ozubljenjem [35], što znači da se stupanj prekrivanja profila smanjuje s povećanjem zahvatnog kuta. Nosivost korijena zuba zupčanika povećava se usporedno s povećanjem zahvatnog kuta zbog povećanja debljine korijena zuba, no

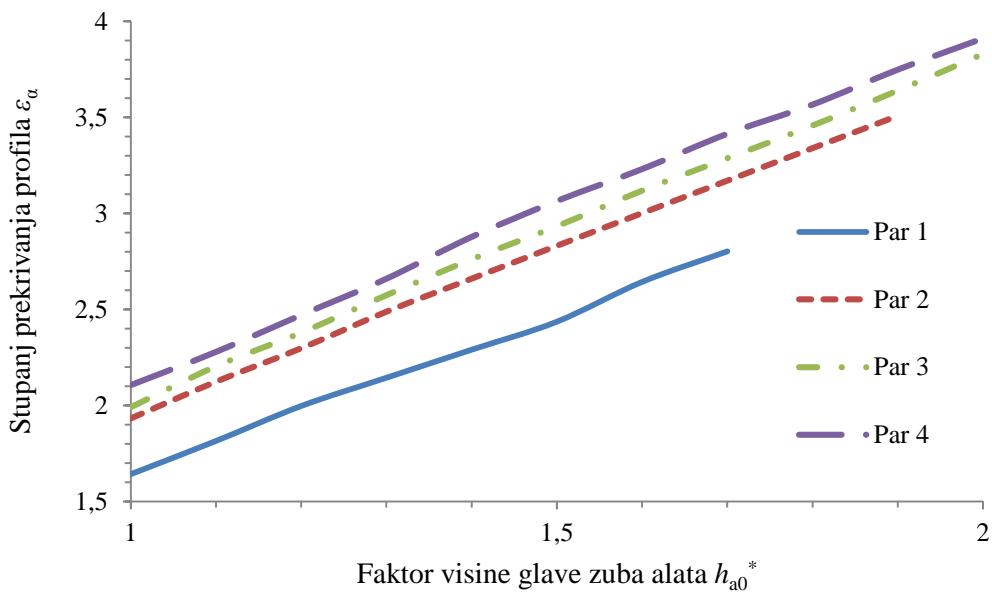
istovremeno se smanjuje nosivost boka zupčanika s unutarnjim ozubljenjem zbog postepenog izravnavanja evolvente boka zuba s unutarnjim ozubljenjem te povećanja kontaktnih naprezanja na boku zuba [31].

Zbog zašiljenosti vrha glave zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem dolazi do prekida linije za par 2 pri  $\alpha_n = 18^\circ$ , što je i očekivano prilikom povećanja zahvatnog kuta.



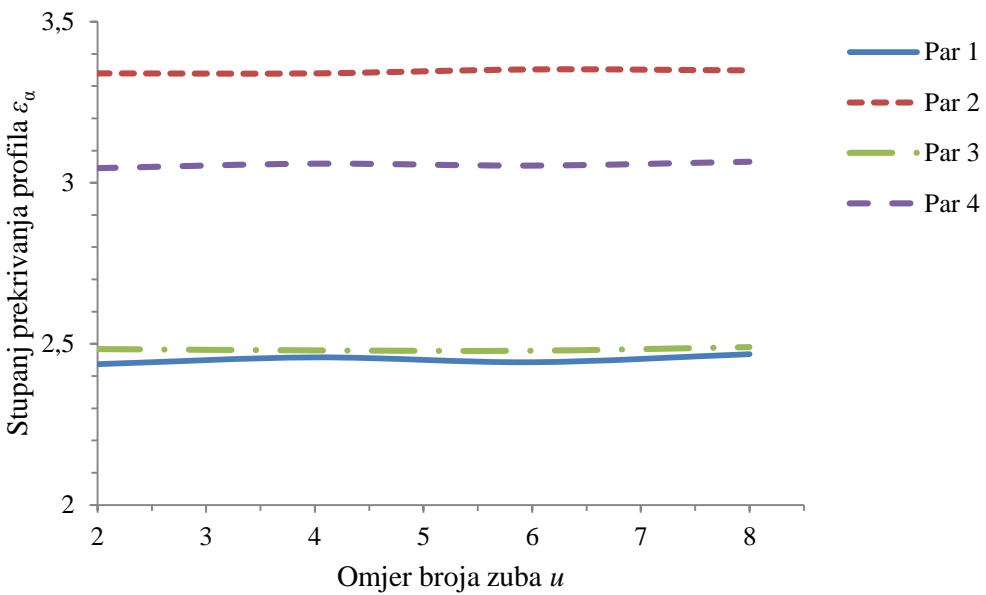
Slika 2.7 Utjecaj promjene zahvatnog kuta  $\alpha_n$  na stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a$

Povećanje visine zuba alata dovodi do povećavanja stupnja prekrivanja profila zupčanog para, no očekivano dovodi i do stvaranja tankih izduženih zuba s povećanim naprezanjem u korijenu zuba [67]. Zbog zašiljenosti vrha glave zuba zupčanika dolazi i do prekida u linijama za parove 1 i 2 pa se preporuča ostati u području  $1,25 < h_{a0}^* < 1,75$  (slika 2.8).



Slika 2.8 Utjecaj promjene faktora visine glave zuba alata  $h_{a0}^*$  na stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a$

Uočeno je da omjer broja zubi nema značajnog utjecaja na stupanj prekrivanja profila (slika 2.9).

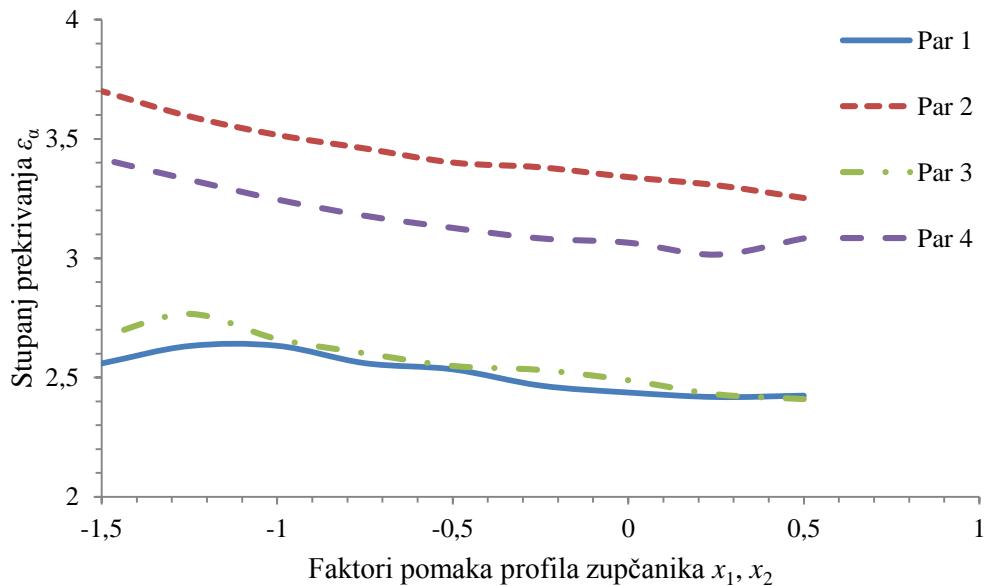


Slika 2.9 Utjecaj promjene omjera broja zuba  $u$  na stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a$

Stupanj prekrivanja profila može se izmijeniti i putem faktora pomaka profila pojedinih zupčanika te izmjenom sume faktora pomaka profila, no to je u praksi ograničeno ili određeno

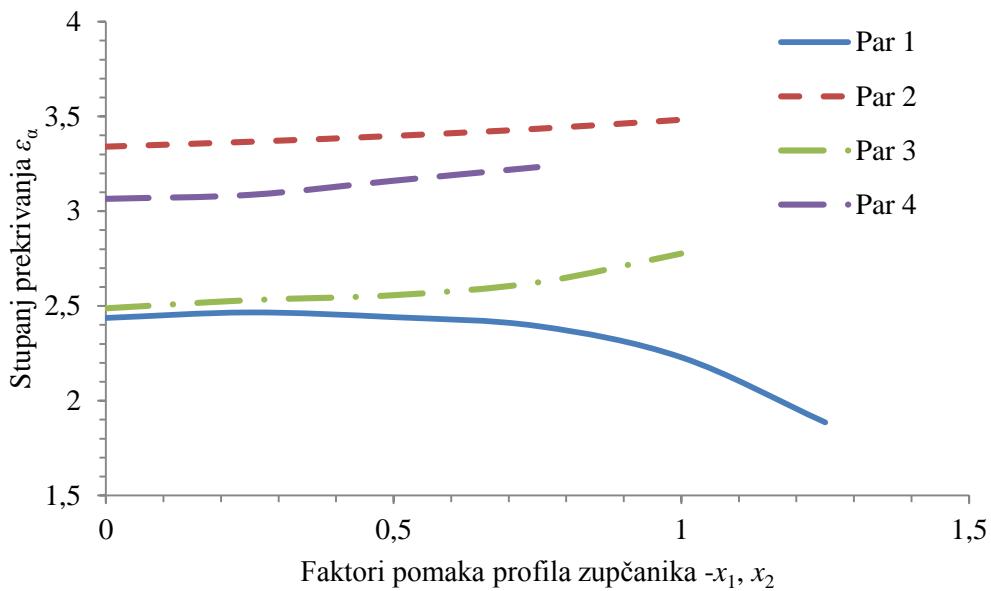
razmakom osi zupčanog para. Utjecaj promjene faktora pomaka profila je ispitana u tri slučaja:  $x_1 = x_2$  za  $x_1, x_2 = -1,5 \dots 0,5$  (slika 2.10);  $\Sigma x = 0, x_1 < 0$  za  $x_1 = -1,5 \dots 0,5$  (slika 2.11) te  $\Sigma x = 0, x_2 < 0$  za  $x_2 = -1,5 \dots 0,5$  (Slika 2.12). Ispitivane granice pomaka profila uvjetovane su unutarnjim ograničenjima programa GearPac CX 3.5 [45] zbog moguće zašiljenosti vrha glave zuba zupčanika ili podrezivanja korijena zuba zupčanika.

U slučaju  $x_1 = x_2$  (Slika 2.10) stupanj prekrivanja profila raste prilikom povećanja faktora pomaka profila u negativnom smjeru, no to povećanje mnogo je manje od onog koje je postignuto promjenom zahvatnog kuta (Slika 2.7) ili visine glave zuba (Slika 2.8). Povećanje pomaka profila u negativnom smjeru također smanjuje nosivost korijena zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem zbog podrezivanja.



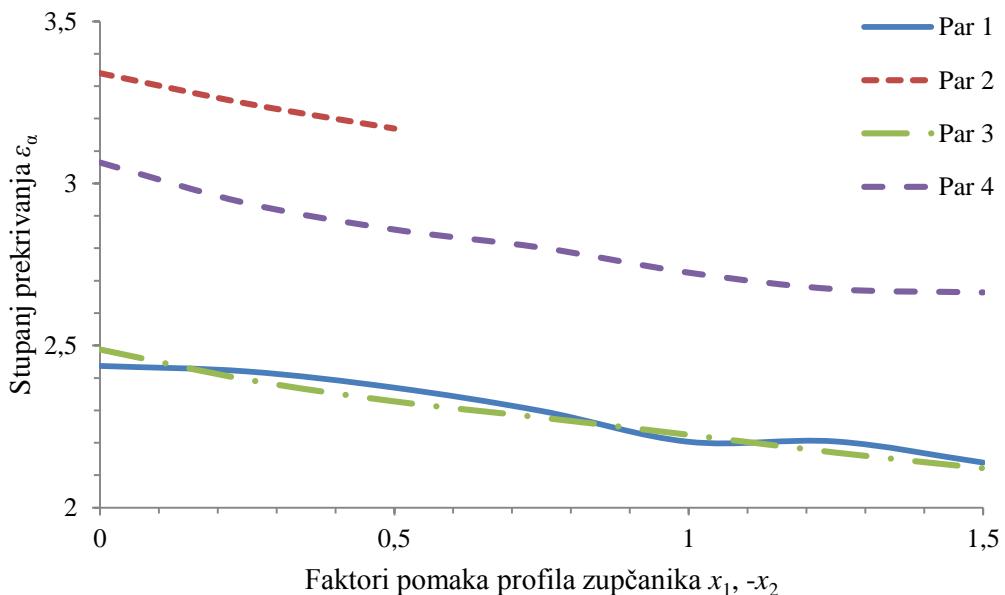
Slika 2.10 Utjecaj promjene faktora pomaka profila zupčanika  $x_1, x_2$  na stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a$  za  $x_1 = x_2$

Za  $\Sigma x = 0, x_1 < 0$ , stupanj prekrivanja profila se povećava u svim slučajevima (Slika 2.11), kako je i očekivano, osim kod para 1, gdje dolazi do jasnog pada koji se može objasniti vrlo velikim zahvatnim kutom. Kod para 1 pojavljuju se smetnje u zahvatu pri  $x_1 = -1,25$ , a kod ostalih parova dolazi do podrezivanja zupčanika s vanjskim ozubljenjem pri  $x_1 = -0,7 \dots -1,0$ . Zbog toga je potrebno izbjegavati negativne pomake profila na zupčaniku s vanjskim ozubljenjem.



Slika 2.11 Utjecaj promjene faktora pomaka profila  $x_1, x_2$  na stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a$  za  $\Sigma x = 0, x_1 < 0$

Pozitivni pomak profila na zupčaniku s vanjskim ozubljenjem dovodi do smanjenja stupnja prekrivanja profila (Slika 2.12), no bez značajnog utjecaja na nosivost korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem, posebno za  $x_1 \leq 0,2$  [44], [31], [39].



Slika 2.12 Utjecaj promjene faktora pomaka profila  $x_1, x_2$  na stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a$  za  $\Sigma x = 0, x_1 > 0$

Linija za par 2 nepotpuna je zbog zašiljenosti vrha glave zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem, što se može očekivati od VPP zupčanika sa velikim pozitivnim pomakom profila. U skladu s preporukama u [44], [39], preporučljivo je primijeniti pozitivni pomak profila na zupčaniku s vanjskim ozubljenjem u granicama  $0 < x_1 \leq 0,2$  kako bi se povećala nosivost zupčanog para bez većeg utjecaja na stupanj prekrivanja profila.

## 2.4 Utjecaj kuta nagiba zuba na parametre UVPP ozubljenja s kosim zubima

Utjecaj kuta nagiba zuba na stupanj prekrivanja UVPP zupčanog para proračunat je na parovima iz tablice 2.2 na temelju ograničenja navedenih u poglavlju 2.2.

Za potrebe proračuna uspoređene su geometrija i stupanj prekrivanja profila za zupčane parove koji se izrađuju istim osnovnim alatom isključivo uz varijaciju kuta nagiba zuba  $\beta$ .

Tablica 2.2 Osnovni podaci za zupčane parove s kosim zubima

Parametar	Par 1	Par 2	Par 3	Par 4
$m_n$	2 mm		4 mm	
$\alpha_n$	18°	20°	18°	20°
$a$	-100		-200	
$d_1, d_2$	62/-262 mm		124/-524 mm	
$\varepsilon_a$	2,441	2,256	2,360	2,239
$\rho_{a0}^*{}_{1,2}$	0,340	0,340	0,340	0,340
$c^*{}_{1,2}$	0,31	0,30	0,35	0,31
Parametar	Par 5	Par 6	Par 7	Par 8
$m_n$	8 mm		12 mm	
$\alpha_n$	18°	20°	22°	18°
$a$	-400 mm		-600 mm	
$d_1, d_2$	248/-1048 mm		372/-1572 mm	
$\varepsilon_a$	2,361	2,239	2,080	2,464
$\rho_{a0}^*{}_{1,2}$	0,340	0,340	0,260	0,260
$c^*{}_{1,2}$	0,35	0,31	0,31	0,30

Tablica 2.2 Osnovni podaci za zupčane parove s kosim zubima (nastavak)

Parametar	Par 9	Par 10	Par 11	Par 12
$m_n$	12 mm		20 mm	
$\alpha_n$	20°	22°	18°	20°
$a$	-600 mm		-1000 mm	
$d_1, d_2$	372/-1572 mm		620/-2620 mm	
$\varepsilon_a$	2,314	2,184	2,361	2,165
$\rho_{a0}^{*}$	0,260	0,260	0,260	0,260
$c^{*}$	0,27	0,35	0,35	0,35
Parametar	Par 13	Par 14	Par 15	Par 16
$m_n$	20 mm		40 mm	
$\alpha_n$	22°	18°	20°	22°
$a$	-1000 mm		-2000 mm	
$d_1, d_2$	620/-2620 mm		1240/-5240 mm	
$\varepsilon_a$	2,184	2,444	2,314	2,184
$\rho_{a0}^{*}$	0,260	0,260	0,260	0,260
$c^{*}$	0,25	0,31	0,27	0,25
Zajednički podaci za sve parove				
$z_1, z_2$	31/-131			
$h_{a0}^{*}$	1,5			
$x_1 = x_2$	0			
$\Sigma x$	0			
$\beta$	$8^\circ, 12^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ$			

Relativna promjena razmaka osi zupčanog para s kosim zubima u odnosu na razmak osi zupčanog para s ravnim zubima

$$\Delta a = \frac{a_{\text{kosizubi}}}{a_{\text{ravnizubi}}} , \quad (2.31)$$

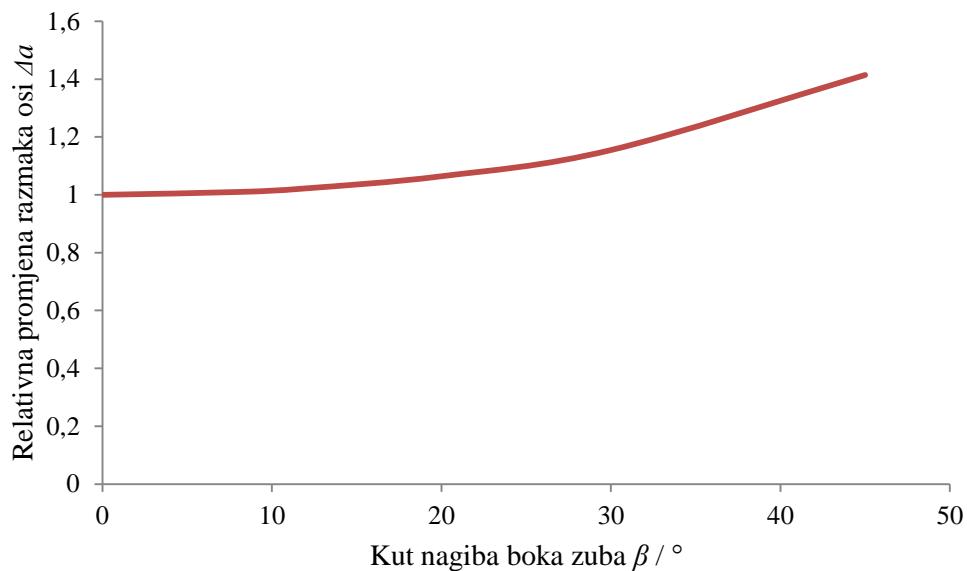
prikazana je na slici 2.13, dok je relativna promjena stupnja prekrivanja profila zupčanog para s kosim zubima u odnosu na stupanj prekrivanja profila zupčanog para s ravnim zubima

$$\Delta \varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_{\alpha \text{ kosizubi}}}{\varepsilon_{\alpha \text{ ravnizubi}}} , \quad (2.32)$$

prikazana na slici 2.14.

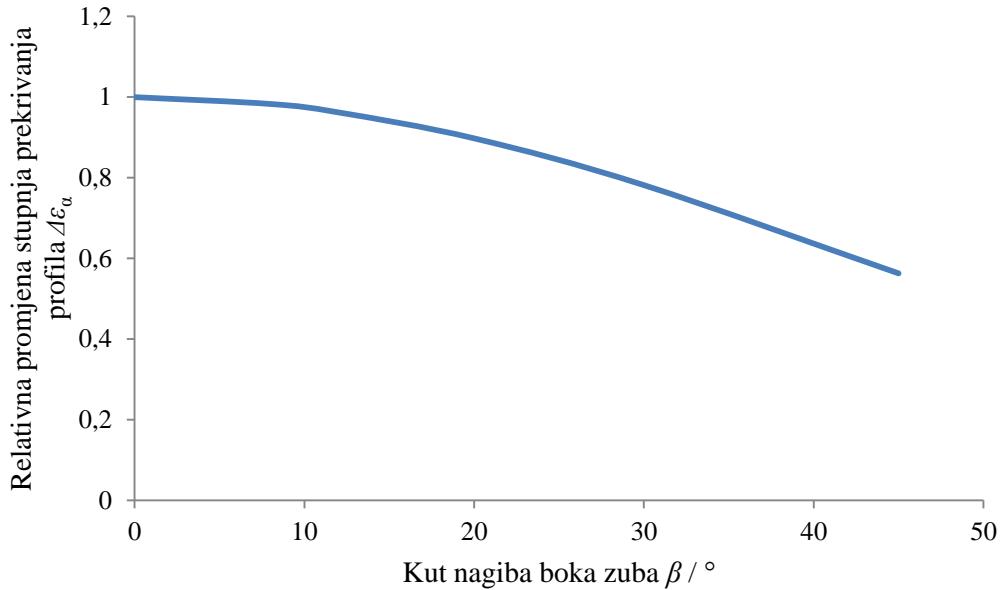
Ovako prikazane relativne promjene razmaka osi i stupnja prekrivanja profila zupčanih parova ovise isključivo o kutu nagiba boka zuba  $\beta$ .

Analizom dobivenih podataka utvrđeno je da se podaci prikazani na slikama 2.13 i 2.14 za pojedine zupčane parove razlikuju najviše 1,2 % za kutove nagiba boka zuba  $\beta > 20^\circ$  pa su vrijednosti za sve promatrane zupčane parove prikazane na jednom grafu.



Slika 2.13 Relativna promjena razmaka osi zupčanika  $\Delta a$  za promatrane parove u ovisnosti o kutu nagiba boka zuba  $\beta$

Povećanje razmaka osi zupčanog para s kosim zubima u odnosu na zupčani par s ravnim zubima iznosi 1...2 % za kutove nagiba boka zuba  $\beta = 8...12^\circ$  te raste na 6,4 % za kut nagiba boka zuba  $\beta = 20^\circ$ . Kod kutova nagiba boka zuba  $\beta = 30...45^\circ$  povećanje razmaka osi zupčanog para iznosi 15,5...41,4 % u odnosu na zupčani par s ravnim zubima, zbog čega je poželjno izbjegavati primjenu ovako velikih kutova nagiba zuba. U području  $\beta = 8...12^\circ$  dolazi do smanjenja stupnja prekrivanja profila od 1,7...3,8 %, pri čemu zupčanici još ostaju u području velikog stupnja prekrivanja profila. Pri  $\beta = 20^\circ$  smanjenje stupnja prekrivanja profila već iznosi 10,3 % te se stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a > 2$  može zadržati samo smanjenjem zahvatnog kuta uz istovremeno povećanje visine zuba zupčanika.



Slika 2.14 Relativna promjena stupnja prekrivanja profila  $\Delta \varepsilon_a$  za promatrane zupčane parove u ovisnosti o kutu nagiba boka zuba  $\beta$

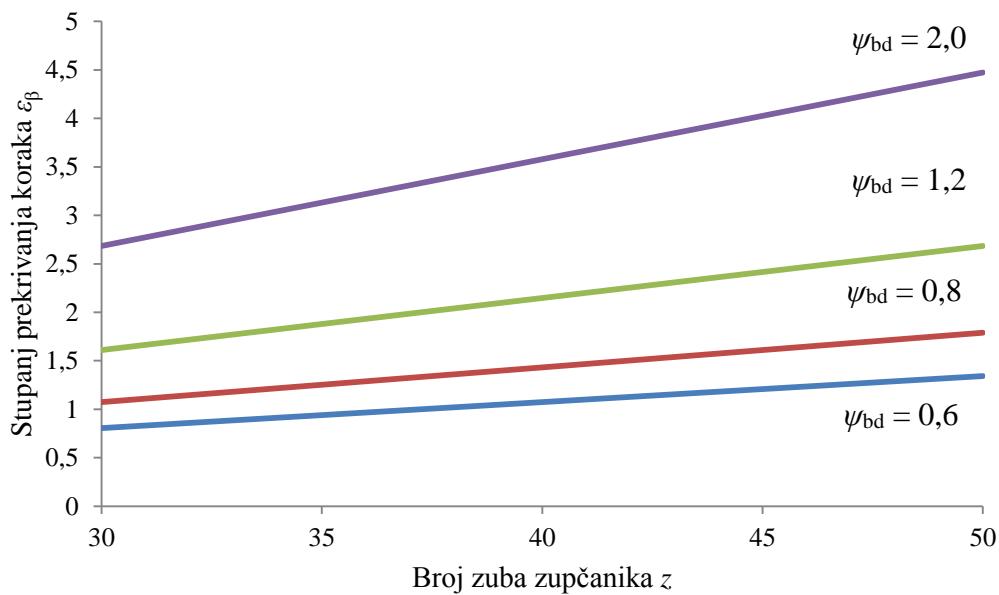
Pri  $\beta = 30^\circ$  smanjenje stupnja prekrivanja profila iznosi 21,8 %, odnosno čak 43,7 % pri  $\beta = 45^\circ$ , zbog čega primjena UVPP ozubljenja nije moguća kod tih kutova nagiba boka zuba. Stoga se zaključuje da je kod UVPP ozubljenja potrebno koristiti najmanji mogući kut nagiba zuba.

Analiza promjena koje nastaju zbog stupnja prekrivanja koraka mnogo je složenija.

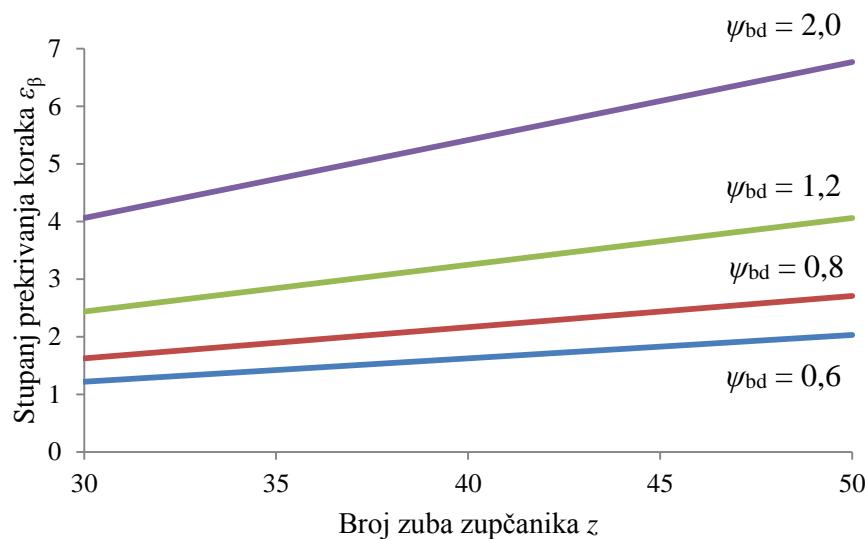
Iz izraza (2.22) zaključuje se da je stupanj prekrivanja profila funkcija tri nezavisne varijable, kuta nagiba boka zuba  $\beta$ , broja zuba zupčanika  $z$  te faktora širine zupčanika  $\psi_{bd}$ . Zbog toga je na slikama 2.15 – 2.19 prikazana ovisnost stupnja prekrivanja profila o broju zuba zupčanika za zadatu vrijednost  $\psi_{bd}$ .

Proračun je proveden za vrijednosti  $\psi_{bd} = 0,6; 0,8; 1,2$  te  $2,0$  pri kutovima nagiba boka zuba  $\beta = 8^\circ, 12^\circ, 20^\circ, 30^\circ$  i  $45^\circ$ . Mogao se započeti proračun na granici podrezivanja korijena zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem pri  $z = 17$ , no prikazano je područje za  $z \geq 30$ , jer zupčanik s vanjskim ozubljenjem za razmatrane zupčane parove ne smije imati manje od 30 zuba zbog mogućih smetnji prilikom izrade [64].

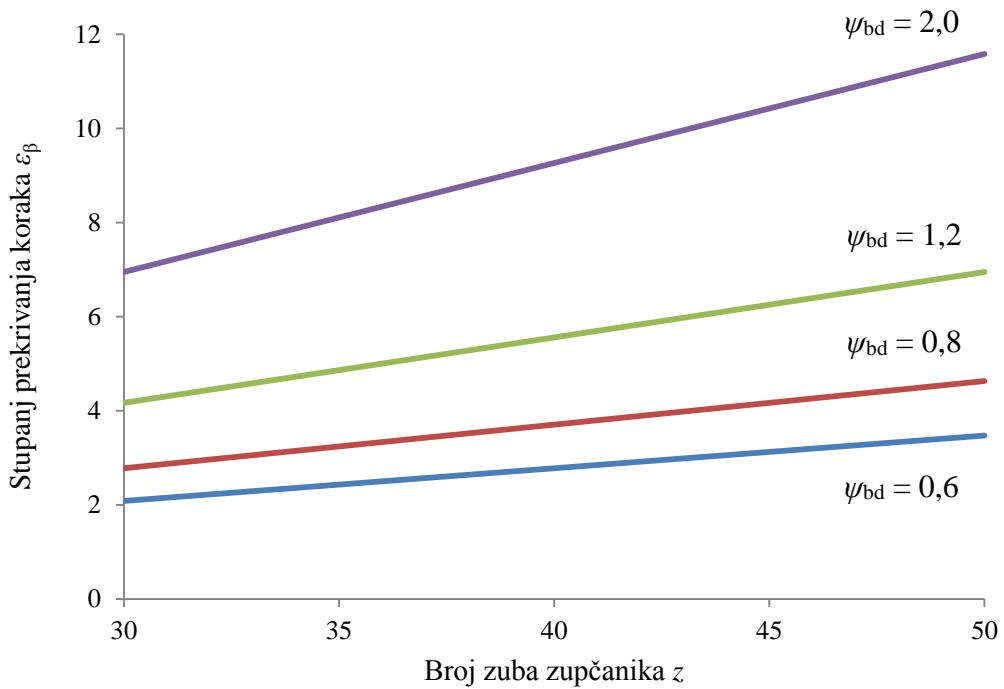
Analizom vrijednosti prikazanih na slikama 2.15 – 2.19 uočava se da se kod kuta nagiba boka zuba  $\beta = 8^\circ$  postiže  $\varepsilon_\beta > 1$  već pri  $\psi_{bd} = 0,8$ .



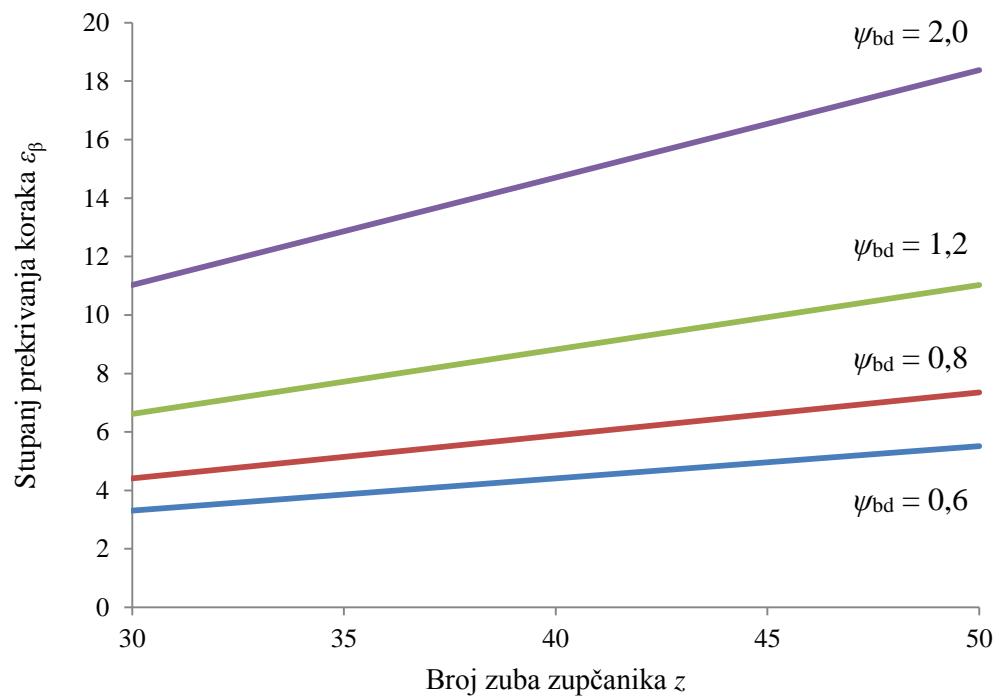
Slika 2.15 Ovisnost stupnja prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta$  o broju zuba zupčanika  $z$  za  $\beta = 8^\circ$



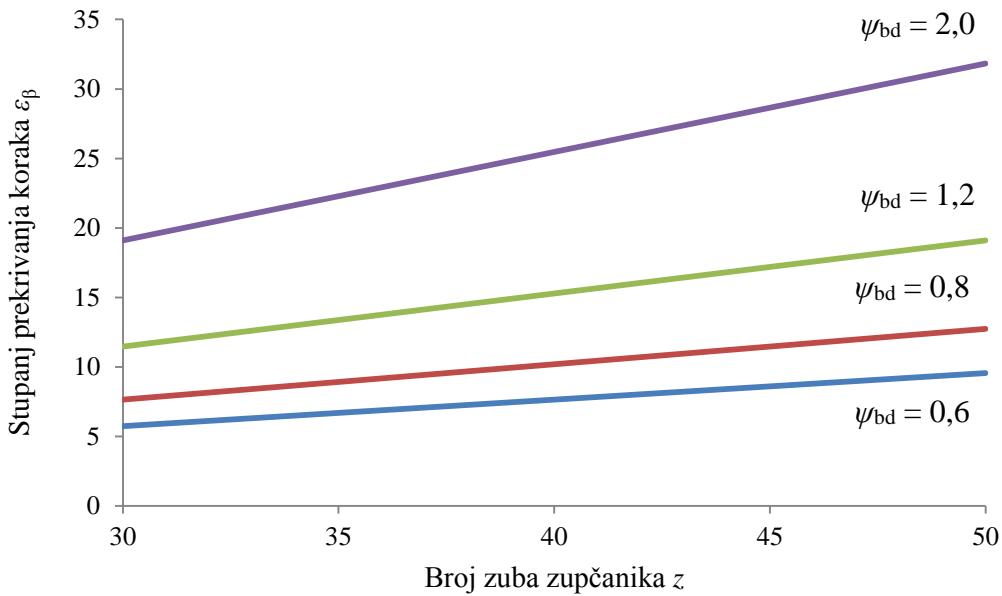
Slika 2.16 Ovisnost stupnja prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta$  o broju zuba zupčanika  $z$  za  $\beta = 12^\circ$



Slika 2.17 Ovisnost stupnja prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta$  o broju zuba zupčanika  $z$  za  $\beta = 20^\circ$



Slika 2.18 Ovisnost stupnja prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta$  o broju zuba zupčanika  $z$  za  $\beta = 30^\circ$



Slika 2.19 Ovisnost stupnja prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta$  o broju zuba zupčanika  $z$  za  $\beta = 45^\circ$

Vrijednosti stupnja prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta$  dalje rastu jednostavnim povećanjem kuta  $\beta$  pa se zaključuje da se pogodnim izborom vrijednosti faktora širine zuba  $\psi_{bd}$  i kuta nagiba zuba  $\beta$  mogu relativno lako postići velike vrijednosti stupnja prekrivanja  $\varepsilon_\gamma$ .

Kutovi  $\beta = 30^\circ$  i  $45^\circ$  nisu pogodni za zupčanike sa stupnjem prekrivanja profila  $\varepsilon_\alpha > 2$ , no iz slika 2.18 i 2.19 je vidljivo da se kod tih kutova vrlo lako postižu stupnjevi prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta = 3,5...5$  za  $\psi_{bd} = 0,6$ , što može biti korisno kod uskih zupčanika.

Podaci prikazani u slikama 2.15 – 2.19 vrijede neovisno o stupnju prekrivanja profila, zbog čega postoji mogućnost primjene NPP zupčanika s kosim ozubljenjem veće širine umjesto VPP zupčanika, uz postignuti stupanj prekrivanja  $\varepsilon_\gamma > 2$ .

S druge strane, uski NPP zupčanici s kosim ozubljenjem obično se izvode u području  $\varepsilon_\gamma \leq 3$ . To područje stupnja prekrivanja preklapa se s područjem primjene VPP ozubljenja s ravnim zubima pa je moguće upotrijebiti VPP zupčanike s ravnim zubima umjesto uskih NPP zupčanika s kosim zubima.

Na temelju iznesenoga zaključuje se da je potrebno točno utvrditi raspon kuta nagiba boka zuba  $\beta$  i faktora širine zuba  $\psi_{bd}$  koji će dati najbolji omjer nosivosti i ukupnog stupnja prekrivanja za koso ozubljenje s velikim stupnjem prekrivanja profila.

U praksi se VPP zupčanici izvode s kosim zubima. Ti zupčanici postepeno ulaze u zahvat dijagonalno preko boka zupčanika pa im je nosivost veća nego VPP zupčanicima s ravnim zubima, a rade tiše i mirnije od zupčanika s ravnim zubima.

Zbog dijagonalnog ulaza u zahvat, uzastopni bokovi zuba zupčanika s kosim zubima u djelomičnom su dodiru tijekom zahvata pa je zahvat zupčanika s kosim zubima mnogo složeniji od zahvata zuba zupčanika s ravnim zubima.

Zaključuje se da raspodjela sile u zahvatu kosog VPP ozubljenja te naprezanje u korijenu i na boku zuba VPP ozubljenja s kosim zubima prelazi granice istraživanja koja su provedena u tijeku izrade ovog rada te predstavlja područje za daljnja istraživanja.

Istraživanja u nastavku ovog rada ograničit će se isključivo na UVPP ozubljenje s ravnim zubima.

### 3. Proračun naprezanja u ozubljenju prema normi ISO 6336

#### 3.1 Proračun naprezanja na boku zuba prema normi ISO 6336-2

Proračun naprezanja na boku zuba prema normi ISO 6336-2 prepostavlja da je svaki zub zupčanika opterećenog okretnim momentom  $T$ , u zahvatu opterećen obodnom silom  $F_t$  koja djeluje na diobenoj kružnici promjera  $d$  [22]

$$F_t = \frac{T}{2d}. \quad (3.1)$$

Prema konvenciji usvojenoj u normi ISO 6336 [22], broj zuba malog zupčanika označava se sa  $z_1$ , dok se broj zuba velikog zupčanika označava sa  $z_2$ . Pri tome je omjer broja zuba  $u$  definiran kao

$$u = \frac{z_2}{z_1}, \quad (3.2)$$

uz uvjet  $|u| \geq 1$  te je negativan kod zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem.

Općeniti izraz za naprezanje na boku zuba zupčanika glasi

$$\sigma_{H0} = Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{d_1 b} \frac{u+1}{u}} . \quad (3.3)$$

Za zupčanike u zahvatu, izraz (3.3) za mali zupčanik glasi

$$\sigma_{H1} = \sigma_{H0} Z_B , \quad (3.4)$$

dok za veliki zupčanik glasi

$$\sigma_{H2} = \sigma_{H0} Z_D . \quad (3.5)$$

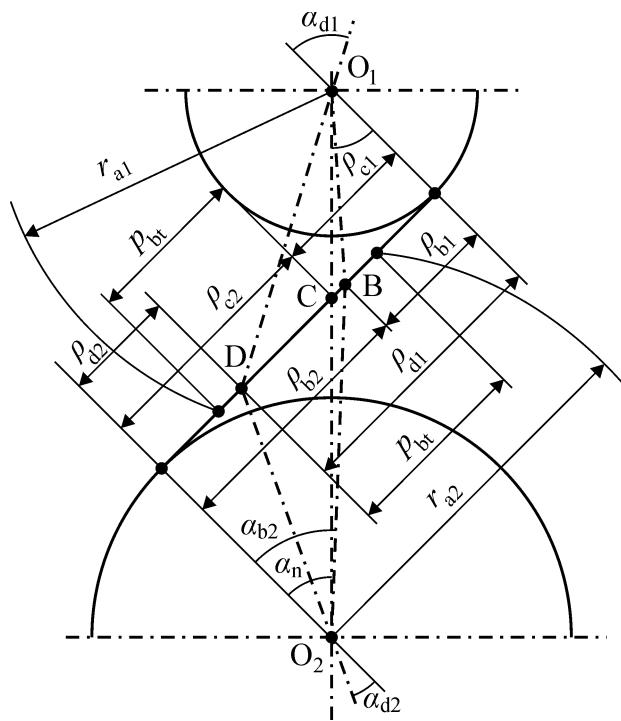
$Z_B$  i  $Z_D$  su faktori korekcije i izračunavaju se putem pomoćnih vrijednosti  $M_1$  i  $M_2$ :

$$M_1 = \sqrt{\frac{\rho_{C1}\rho_{C2}}{\rho_{B1}\rho_{B2}}} = \frac{\tan \alpha_{wt}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{d_{a1}^2}{d_{b1}^2}-1}-\frac{2\pi}{z_1}\right)\left(\sqrt{\frac{d_{a2}^2}{d_{b2}^2}-1}-\left(\varepsilon_a-1\right)\frac{2\pi}{z_2}\right)}}, \quad (3.6)$$

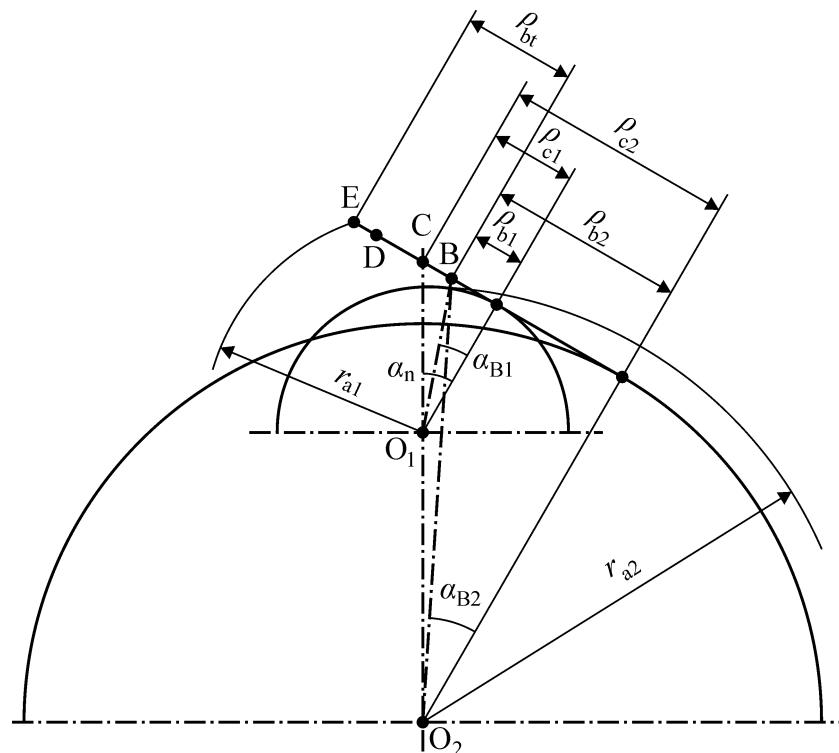
$$M_2 = \sqrt{\frac{\rho_{C1}\rho_{C2}}{\rho_{D1}\rho_{D2}}} = \frac{\tan \alpha_{wt}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{d_{a2}^2}{d_{b2}^2}-1}-\frac{2\pi}{z_2}\right)\left(\sqrt{\frac{d_{a1}^2}{d_{b1}^2}-1}-\left(\varepsilon_a-1\right)\frac{2\pi}{z_1}\right)}}. \quad (3.7)$$

Odgovarajući polumjeri zakrivljenosti u točkama na boku zuba zupčanika ( $\rho_{B1}$ ,  $\rho_{B2}$ ,  $\rho_{C1}$ ,  $\rho_{C2}$ ,  $\rho_{D1}$ ,  $\rho_{D2}$ ) prikazani su na slici 3.1 za par s vanjskim ozubljenjem te na slici 3.2 za par s unutarnjim ozubljenjem.

Za zupčane parove s vanjskim ozubljenjem vrijedi  $Z_B, Z_D = 1$  za  $M_1, M_2 \leq 1$ . U ostalim slučajevima vrijedi  $Z_B = M_1, Z_D = M_2$ , a za zupčane parove s unutarnjim ozubljenjem vrijedi  $Z_D = 1$  [22].



Slika 3.1 Polumjeri zakrivljenosti u točkama na bokovima zuba zupčanika zupčanog para s vanjskim ozubljenjem [22]



Slika 3.2 Polumjeri zakrivljenosti u točkama na bokovima zuba zupčanika zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem [22]

Faktorom zone (oblika zuba)  $Z_H$  uračunava se utjecaj zakrivljenosti boka zuba u točki zahvata te preračunava obodna sila na diobenoj kružnici  $F_t$  u obodnu silu na kinematskoj kružnici  $F_{wt}$ , a dan je izrazom

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cos \beta_b \cos \alpha_{wt}}{\cos^2 \alpha_t \sin \alpha_{wt}}} . \quad (3.8)$$

Utjecaj vrijednosti Poissonovog koeficijenta  $\nu$  i modula elastičnosti  $E$  za materijal od kojeg su napravljeni zupčanici uračunava se putem faktora elastičnosti  $Z_E$  i dan je izrazom

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}} . \quad (3.9)$$

Utjecaj stupnja prekrivanja profila kod zupčanika sa  $\varepsilon_a > 2$  uračunava se putem faktora prekrivanja  $Z_\varepsilon$ , a izračunava se putem izraza

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_a}{3}} . \quad (3.10)$$

Za zupčane parove sa  $\varepsilon_a < 2$  usvaja se  $Z_\varepsilon = 1$  [22].

Faktor kuta nagiba zuba  $Z_\beta$  izračunava se putem izraza

$$Z_\beta = \sqrt{\cos \beta} , \quad (3.11)$$

a koristi se za uračunavanje utjecaja kuta nagiba boka zuba  $\beta$  kod zupčanika s kosim ozubljenjem.

Analizom vrijednosti u (3.3) (širina boka zuba  $b$ , diobeni promjer zupčanika s vanjskim ozubljenjem  $d_1$  te omjer broja zuba zupčanika  $u$ ) zaključuje se da je izraz prvenstveno namijenjen izračunavanju naprezanja na boku zupčanika s vanjskim ozubljenjem.

Povoljan utjecaj konveksno-konkavnog dodira bokova kod zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem se tek djelomično uzima u obzir putem izraza za omjer broja zuba zupčanika  $u$ , budući da je taj broj negativan kod zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem [22].

Za širinu boka zuba  $b$  uzima se širina užeg zupčanika u zahvatu mjerena na promjeru preko korijena, uz zanemarivanje namjernih skošenja i zaobljenja rubova.

Norma [22] je definirana za područje stupnja prekrivanja profila VPP ozubljenja  $2 < \varepsilon_a \leq 2,5$ . Napominje se bez dalnjih pojašnjenja da je za proračun naprezanja na boku zuba mjerodavna unutarnja točka E dvostrukog zahvata malog zupčanika te da silu prenose dva ili tri uzastopna boka zuba, ovisno o dijelu zahvata [22]. Norma [22] prepostavlja da je svaki par zuba u zahvatu opterećen silom  $F_t$  u punom iznosu neovisno o stupnju prekrivanja profila.

### 3.2 Proračun naprezanja u korijenu zuba prema normi ISO 6336-3

U proračunu naprezanja u korijenu zuba prema [22] prepostavlja se da kod NPP ozubljenja sila djeluje u vanjskoj točki jednostrukog zahvata. Za VPP ozubljenje samo se napominje da je mjerodavno naprezanje u unutarnjoj točki trostrukog zahvata D, bez pojašnjenja radi li se o unutarnjem ili vanjskom ozubljenju.

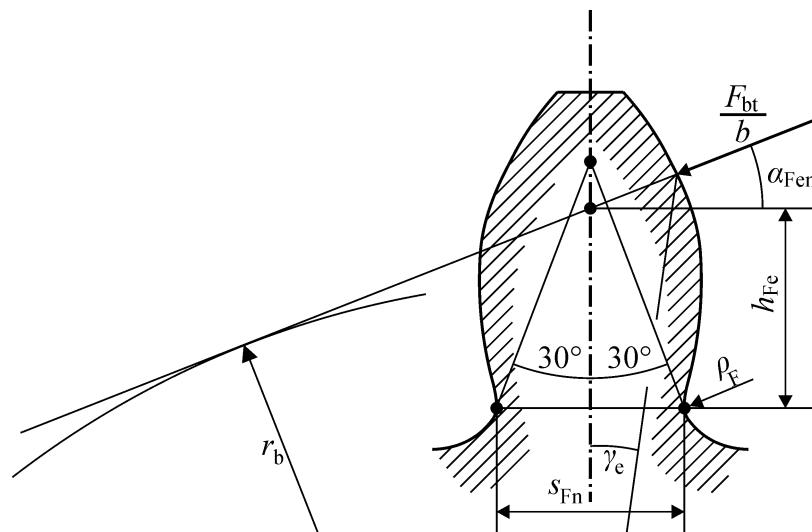
Opći izraz za naprezanje u korijenu zuba  $\sigma_{F0}$  glasi

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} Y_F Y_S Y_\beta Y_B Y_{DT}. \quad (3.12)$$

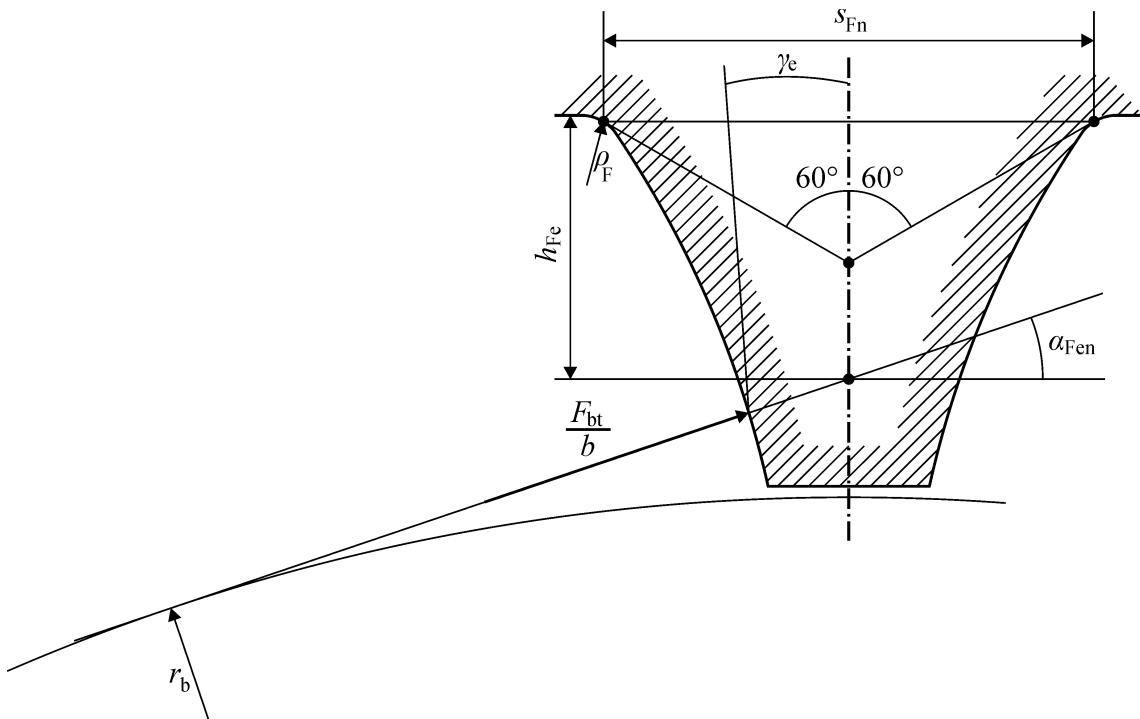
Utjecaj oblika zuba zupčanika na naprezanje u korijenu zuba uračunava se putem faktora oblika  $Y_F$

$$Y_F = \frac{\frac{6h_{Fe}}{m_n} \cos \alpha_{Fen}}{\left( \frac{s_{Fn}}{m_n} \right)^2 \cos \alpha_n}. \quad (3.13)$$

Za izračunavanje ovog faktora potrebno je odrediti širinu zuba u kritičnom presjeku  $s_{Fn}$ , odgovarajući krak sile  $h_{Fe}$  te kut  $\alpha_{Fen}$  pod kojim sila na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  djeluje na Zub zupčanika. To je prikazano na slici 3.3 za zupčanik s vanjskim ozubljenjem i na slici 3.4 za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem.



Slika 3.3 Profil zuba vanjskog ozubljenja i veličine potrebne za izračunavanje faktora oblika za vanjsko ozubljenje [22]



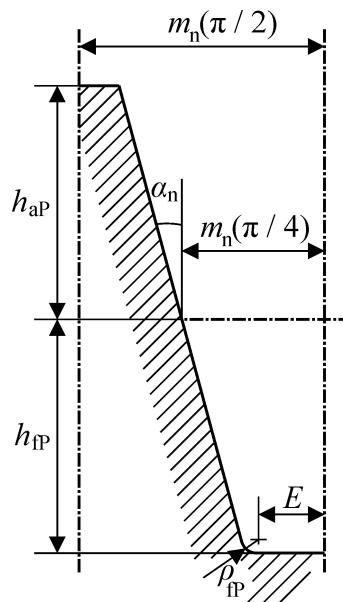
Slika 3.4 Profil zuba unutarnjeg ozubljenja i veličine potrebne za izračunavanje faktora oblika za unutarnje ozubljenje [22]

Norma [22] pretpostavlja da je širina zuba u kritičnom presjeku  $s_F$  za zupčanik s vanjskim ozubljenjem određena točkom na prijelaznoj krivulji korijena zuba u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zuba zatvara kut od  $30^\circ$  sa simetralom zuba (Slika 3.3). Ta točka se koristi i za određivanje duljine kraka sile  $h_{Fe}$ .

Širina zuba u kritičnom presjeku  $s_F$  za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem prema [22] određuje se točkom na prijelaznoj krivulji korijena zuba u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zuba zatvara kut od  $60^\circ$  sa simetralom zuba (Slika 3.4). Ta točka se koristi i za određivanje duljine kraka sile  $h_{Fe}$  kod zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.

Uz proračun naprezanja u korijenu zuba prema normi ISO 6336-3 [22] navedeno je da je norma predviđena za zupčanike s vanjskim ozubljenjem izrađene alatom u obliku ozubljene letve ili pužnim glodalom. Zbog toga se zupčanici s unutarnjim ozubljenjem prema normi ISO 6336-3 proračunavaju kao zupčanici s vanjskim ozubljenjem koji se izrađuju ozubljenom letvom čiji je osnovni profil izведен iz geometrije reznog zupčanika upotrijebljenog za izradu zupčanika s unutarnjim ozubljenjem [22].

Osnovni profil zupčanika s vanjskim ozubljenjem koji se koristi u proračunu naprezanja prema normi [22] prikazan je na slici 3.5.



Slika 3.5 Osnovni profil zupčanika [22]

U proračunu se umjesto polumjera zakrivljenosti korijena zuba osnovnog profila  $\rho_{fp}$  koristi računski polumjer zakrivljenosti korijena zuba osnovnog profila  $\rho_{fpV}$ . Za zupčanik s vanjskim ozubljenjem vrijedi  $\rho_{fpV} = \rho_{fp}$ , dok je kod zupčanika s unutarnjim ozubljenjem potrebno preračunavanje prema izrazu [22]

$$\rho_{fpv} \approx \rho_{fp} + m_n \frac{\left( x_0 + \frac{h_{fp}}{m_n} - \frac{\rho_{fp}}{m_n} \right)^{1.95}}{3,156 \cdot 1,036^{z_0}}. \quad (3.14)$$

Širina zuba zupčanika u kritičnom presjeku  $s_{Fn}$  računa se prema izrazu

$$s_{Fn} = m_n \left( z_n \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + \sqrt{3} \left( \frac{G}{\cos \theta} - \frac{\rho_{fpv}}{m_n} \right) \right), \quad (3.15)$$

kod zupčanika s vanjskim ozubljenjem, a za unutarnje ozubljenje računa se prema izrazu

$$s_{Fn} = m_n \left( z_n \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \left( \frac{G}{\cos \theta} - \frac{\rho_{fpv}}{m_n} \right) \right). \quad (3.16)$$

Polumjer zakrivljenosti prijelazne krivulje korijena zuba zupčanika  $\rho_F$  računa se putem izraza

$$\rho_F = \rho_{fpv} + m_n \left( \frac{2G^2}{\cos \theta} \right) \cdot (z_n \cos^2 \theta - 2G)^{-1}. \quad (3.17)$$

Za zupčanik s vanjskim ozubljenjem krak sile  $h_{Fe}$  izračunava se putem izraza

$$h_{Fe} = \frac{m_n}{2} \left[ (\cos \gamma_e - \sin \gamma_e \tan \alpha_{Fen}) \frac{d_{en}}{m_n} - z_n \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) - \left( \frac{G}{\cos \theta} - \frac{\rho_{fpv}}{m_n} \right) \right], \quad (3.18)$$

dok se za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem izračunava putem izraza

$$h_{Fe} = \frac{m_n}{2} \left[ (\cos \gamma_e - \sin \gamma_e \tan \alpha_{Fen}) \frac{d_{en}}{m_n} - z_n \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) - \sqrt{3} \left( \frac{G}{\cos \theta} - \frac{\rho_{fpv}}{m_n} \right) \right]. \quad (3.19)$$

Izračunavaju se ostali izrazi :

$$E = \frac{\pi}{4} m_n - h_{fp} \tan \alpha_n - (1 - \sin \alpha_n) \frac{\rho_{fpv}}{\cos \alpha_n}, \quad (3.20)$$


---

$$G = \frac{\rho_{fpv}}{m_n} - \frac{h_{fp}}{m_n} + x, \quad (3.21)$$

$$H = \frac{2}{z_n} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{E}{m_n} \right) - \frac{\pi}{3} \text{ (za zupčanik s vanjskim ozubljenjem)}, \quad (3.22)$$

$$H = \frac{2}{z_n} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{E}{m_n} \right) - \frac{\pi}{6} \text{ (za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem)}, \quad (3.23)$$

$$\theta = \frac{2G}{z_n} \tan \theta - H, \quad (3.24)$$

$$d_{bn} = d_n \cos \alpha_n, \quad (3.25)$$

$$d_{en} = 2 \frac{z}{|z|} \sqrt{\left[ \sqrt{\left( \frac{d_{an}}{2} \right)^2 - \left( \frac{d_{bn}}{2} \right)^2} - \frac{\pi d \cos \beta \cos \alpha_n (\varepsilon_\alpha - 1)}{|z|} \right]^2 + \left( \frac{d_{bn}}{2} \right)^2}, \quad (3.26)$$

$$\alpha_{en} = \arccos \frac{d_{bn}}{d_{en}}, \quad (3.27)$$

$$\gamma_e = \frac{0,5\pi + 2 \tan \alpha_n x}{z_n} + \operatorname{inv} \alpha_n - \operatorname{inv} \alpha_{en}, \quad (3.28)$$

$$\alpha_{fen} = \alpha_{en} - \gamma_e = \tan \alpha_{en} - \operatorname{inv} \alpha_n - \frac{0,5\pi + 2 \tan \alpha_n x}{z_n}. \quad (3.29)$$

Proračun faktora oblika  $Y_F$  prema normi ISO 6336-3 [22] ne vodi dovoljno računa o razlikama između unutarnjeg i vanjskog ozubljenja, jer se zupčanik s unutarnjim ozubljenjem proračunava kao zupčanik s vanjskim ozubljenjem za čiju izradu je upotrijebljena ozubljena letva, što ne odgovara stvarnosti [31]. Norma također navodi [22] da se najveće naprezanje u korijenu zuba javlja u točki u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zupčanika s unutarnjim ozubljenjem zatvara kut od  $60^\circ$  prema simetrali zuba, dok je u [49], [48], [52] ustanovljeno da taj kut iznosi  $45^\circ$ .

Faktorom za korekciju naprezanja  $Y_s$  u proračun se unosi učinak polumjera zakriviljenosti korijena kao koncentratora naprezanja te tlačnog naprezanja i naprezanja na savijanje u korijenu zuba zupčanika zbog djelovanja sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ .

Faktor za korekciju naprezanja  $Y_S$  računa se prema izrazu

$$Y_S = \left( 1,2 + 0,13 \frac{s_{Fn}}{h_{Fe}} \right) \cdot \left( \frac{s_{Fn}}{2\rho_F} \right)^{\frac{1}{1,21 + \frac{2,3h_{Fe}}{s_{Fn}}}}. \quad (3.30)$$

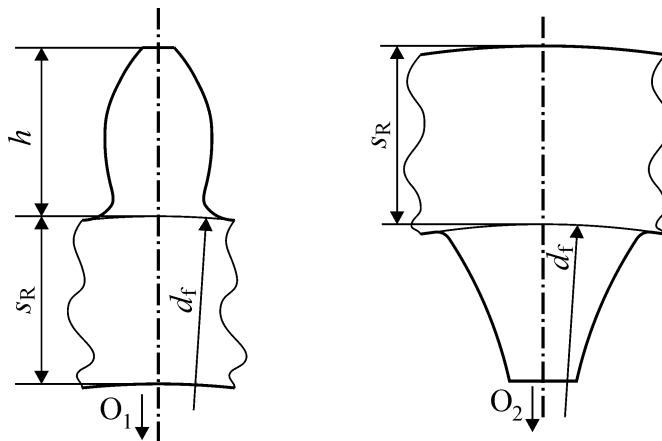
Prema normi ISO 6336 [22], izraz (3.30) dobiven je kombinacijom empirijskih i numeričkih istraživanja, zbog čega je točan samo za zupčanike s vanjskim ozubljenjem i zahvatnim kutom  $\alpha = 20^\circ$ , a u svim ostalim slučajevima daje samo približne vrijednosti [22]. Zbog toga je primjenjivost ovog izraza na VPP zupčanike s unutarnjim ozubljenjem dodatno ograničena. Faktorom kuta nagiba zuba  $Y_\beta$  uzima se u obzir učinak povećanja ukupnog stupnja prekrivanja profila kod kosog ozubljenja zbog prekrivanja koraka. Faktor kuta nagiba zuba  $Y_\beta$  definiran je izrazom

$$Y_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \frac{\beta}{120^\circ}. \quad (3.31)$$

Za stupnjeve prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta > 1,0$  koristi se vrijednost  $\varepsilon_\beta = 1,0$ . Za kutove  $\beta > 30^\circ$  koristi se  $\beta = 30^\circ$  te se preporuča iskustvena provjera računske vrijednosti  $Y_\beta$  za kutove  $\beta > 25^\circ$  [22].

Faktor debljine vijenca  $Y_B$  koristi se za kontrolu zupčanika s tankim vijencem kod kojih može doći do loma zupčanika na kružnici korijena zuba, umjesto na prijelaznoj krivulji korijena zuba.

Za proračun faktora debljine vijenca  $Y_B$  mjerodavne su visina zuba zupčanika  $h$  te debljina vijenca zupčanika  $s_R$  kod zupčanika s vanjskim ozubljenjem (slika 3.6, lijevo), dok su kod zupčanika s unutarnjim ozubljenjem mjerodavni debljina vijenca zupčanika  $s_R$  te modul zupčanika  $m_n$  (slika 3.6, desno).



Slika 3.6 Veličine potrebne za izračunavanje faktora debljine vijenca. Lijevo: vanjsko ozubljenje. Desno: unutarnje ozubljenje.

Za zupčanik s vanjskim ozubljenjem vrijedi  $Y_B = 1$  za  $\frac{s_R}{h} \geq 1,2$ .

U slučaju  $0,5 < \frac{s_R}{h} < 1,2$  faktor  $Y_B$  za zupčanik s vanjskim ozubljenjem računa se prema izrazu

$$Y_B = 1,6 \ln \left( 2,242 \frac{h}{s_R} \right), \quad (3.32)$$

a zupčanik se smatra zupčanikom s tankim vijencem. Omjeri  $\frac{s_R}{h} \leq 0,5$  nisu dopušteni kod zupčanika s vanjskim ozubljenjem [22].

Za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem vrijedi  $Y_B = 1$  za  $\frac{s_R}{m_n} \geq 3,5$ .

U slučaju  $1,75 < \frac{s_R}{m_n} < 3,5$  faktor  $Y_B$  za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem računa se prema izrazu

$$Y_B = 1,15 \ln \left( 8,324 \frac{m_n}{s_R} \right), \quad (3.33)$$

a zupčanik se smatra zupčanikom s tankim vijencem. Kod zupčanika s unutarnjim ozubljenjem omjeri  $\frac{s_R}{m_n} \leq 1,75$  nisu dopušteni [22].

Faktor stupnja prekrivanja  $Y_{DT}$  koristi se za korekciju vrijednosti naprezanja u korijenu zuba kod VPP zupčanika u području stupnja prekrivanja  $2,05 < \varepsilon_\alpha \leq 2,5$ . Faktor stupnja prekrivanja  $Y_{DT}$  predstavlja povećanje točnosti proračuna naprezanja u korijenu zuba zupčanika prema normi ISO 6336 [22] u odnosu na faktor stupnja prekrivanja  $Y_\epsilon$  prema normi DIN 3990 [11]. Za zupčanike sa stupnjem prekrivanja profila stupnja  $\varepsilon_\alpha \leq 2,05$  i/ili stupnja točnosti izrade većeg od 4 vrijedi  $Y_{DT} = 1$ .

Za zupčanike stupnja točnosti izrade 4 ili manjeg u području  $2,05 < \varepsilon_\alpha \leq 2,5$  vrijedi izraz

$$Y_{DT} = -0,666\varepsilon_\alpha + 2,366, \quad (3.34)$$

dok za zupčanike stupnja točnosti izrade 4 ili manjeg u području  $\varepsilon_\alpha > 2,5$  vrijedi  $Y_{DT} = 0,7$ .

Uz pretpostavku da je naprezanje u korijenu zuba zupčanika proporcionalno sili koja djeluje na Zub zupčanika, ovo znači da se u proračunu prema normi ISO 6336 pretpostavlja da je Zub VPP zupčanog para opterećen sa 100...70 % normalne sile u zahvatu, što se kosi sa rezultatima istraživanja iz [35], [17], [20].

Na temelju iznesenoga zaključuje se da je proračun prema normi [22] prilično općenit, te točan samo za NPP zupčanike s vanjskim ozubljenjem i  $\alpha = 20^\circ$ . U proračunu postoje pojednostavljenja kojima se olakšava računanje te uzimaju u obzir netočnosti u izradi ozubljenja. Zbog tih pojednostavljenja nije moguće dovoljno točno odrediti nosivost zupčanika s unutarnjim ozubljenjem i nosivost VPP zupčanika općenito.

Zbog svih navedenih razloga, bilo je potrebno pronaći postupak proračuna naprezanja u korijenu zuba zupčanika i postupak proračuna naprezanja na boku zuba zupčanika koji će biti točni neovisno o parametrima geometrije ozubljenja te davati točne rezultate prilikom proračuna VPP zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.

Rješenje za proračun naprezanja u korijenu zuba zupčanika pronađeno je u postupku proračuna prema [49], [48], [52], a naprezanje na boku zuba proračunat će se prema Hertzovom izrazu za kontaktno naprezanje [44], [73]. Navedeni postupci proračuna bit će detaljnije objašnjeni u sljedećem poglavljju.

# 4. Proračun naprezanja i deformacija zuba UVPP ozubljenja

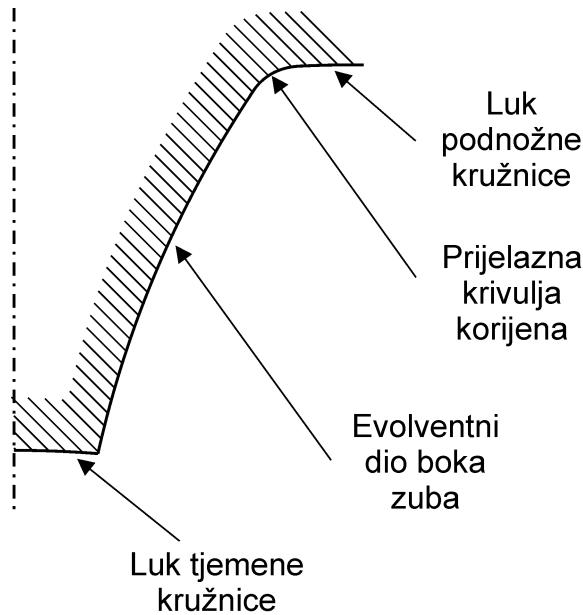
U ovom poglavlju predstavljen je proračun naprezanja u korijenu zuba unutarnjeg ozubljenja prema radovima [49], [48], [52] te proračun elastične deformacije zuba unutarnjeg ozubljenja prema [51]. U tim radovima postupci proračuna su detaljno razrađeni i verificirani putem metode konačnih elemenata. Pri tome je definirana i objašnjena povezanost geometrije zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem s vrijednostima naprezanja u korijenu zuba i elastičnom deformacijom zuba.

Proračun naprezanja na boku zuba unutarnjeg ozubljenja riješen je Hertzovim izrazom koji je primijenjen prilikom proračuna u radovima [35], [66], [73].

## 4.1 Prijelazna krivulja korijena zuba s unutarnjim ozubljenjem

Profil zuba unutarnjeg ozubljenja sastoji se od četiri dijela (Slika 4.1), a gledano od vrha glave zuba prema korijenu to su luk tjemene kružnice, evolventni dio boka zuba, prijelazna krivulja korijena i luk podnožne kružnice. Za proračun naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem potrebna je jednadžba prijelazne krivulje korijena. Prepostavlja se

da je zupčanik s unutarnjim ozubljenjem izrađen reznim zupčanikom, zbog čega je prijelazna krivulja korijena zuba trohoida [31].

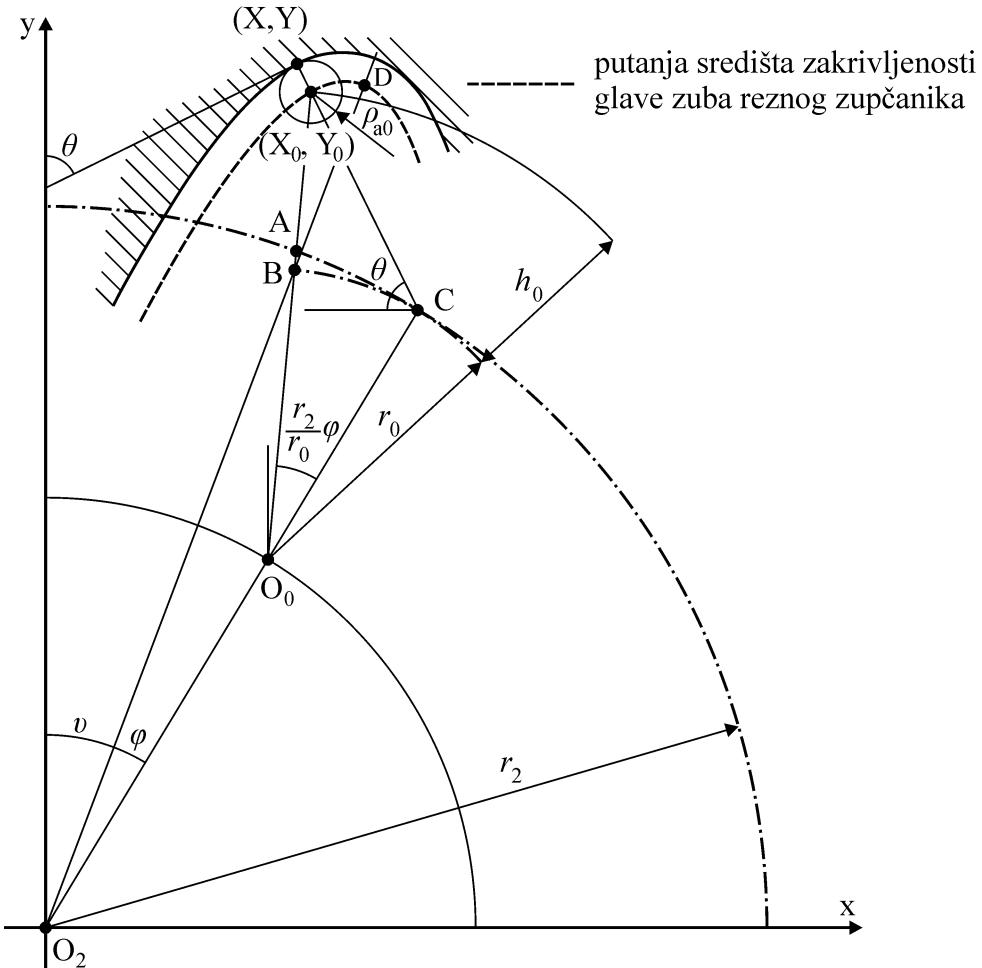


Slika 4.1 Dijelovi profila zuba unutarnjeg ozubljenja

Za izračunavanje naprezanja naprezanja u korijenu zuba prema proračunu iz radova [49], [48], [52], potrebno je odrediti položaj točke na prijelaznoj krivulji korijena zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zupčanika s unutarnjim ozubljenjem zatvara kut od  $45^\circ$  sa simetralom zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem, za razliku od proračuna prema ISO 6336 [22], u kojem se koristi točka na prijelaznoj krivulji korijena zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zupčanika s unutarnjim ozubljenjem zatvara kut od  $60^\circ$  sa simetralom zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.

Zbog toga se u središte zupčanika s unutarnjim ozubljenjem  $O_2$  postavlja koordinatni sustav  $(x, y)$  (Slika 4.2). Položaj središta zakriviljenosti vrha glave zuba rezognog zupčanika označen je koordinatama  $X_0, Y_0$ , dok je koordinatama  $X, Y$  označen položaj izvedene točke na prijelaznoj krivulji korijena. Polumjer diobene kružnice zupčanika s unutarnjim ozubljenjem označen je s  $r_2$ , a polumjer diobene kružnice rezognog zupčanika označen je s  $r_0$ . Udaljenost središta zakriviljenosti vrha glave zuba rezognog zupčanika od diobene kružnice rezognog zupčanika označena je s  $h_0$ , kut između koordinatne osi  $y$  i pravca koji prolazi kroz krajnju točku prijelazne krivulje korijena  $D$  označen je s  $v$ , zakretni kut rezognog zupčanika označen je s  $\varphi$ , a

polumjer zakrivljenosti vrha zuba rezognog zupčanika označen je s  $\rho_{a0}$ . Središte rezognog zupčanika nalazi se u točki  $O_0$ .



Slika 4.2 Koordinatni sustav za izračunavanje položaja točke na prijelaznoj krivulji korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema [49], [48], [52]

Koordinate točaka određene su izrazima

$$X_0 = (r_2 - r_0) \sin(\varphi + \nu) + (r_0 + h_0) \sin\left(\varphi + \nu - \left(\frac{r_2}{r_0}\right)\varphi\right), \quad (4.1)$$

$$Y_0 = (r_2 - r_0) \cos(\varphi + \nu) + (r_0 + h_0) \cos\left(\varphi + \nu - \left(\frac{r_2}{r_0}\right)\varphi\right), \quad (4.2)$$

$$X = (r_2 - r_0) \sin(\varphi + \nu) + (r_0 + h_0) \sin\left(\varphi + \nu - \left(\frac{r_2}{r_0}\right)\varphi\right) - \frac{r_0 \sin(\varphi + \nu) - (r_0 + h_0) \sin\left(\varphi + \nu - \left(\frac{r_2}{r_0}\right)\varphi\right)}{\sqrt{r_0^2 + (r_0 + h_0)^2 - 2r_0(r_0 + h_0) \cos\left(\left(\frac{r_2}{r_0}\right)\varphi\right)}} \rho_{a0}, \quad (4.3)$$

$$Y = (r_2 - r_0) \cos(\varphi + \nu) + (r_0 + h_0) \cos\left(\varphi + \nu - \left(\frac{r_2}{r_0}\right)\varphi\right) - \frac{r_0 \cos(\varphi + \nu) - (r_0 + h_0) \cos\left(\varphi + \nu - \left(\frac{r_2}{r_0}\right)\varphi\right)}{\sqrt{r_0^2 + (r_0 + h_0)^2 - 2r_0(r_0 + h_0) \cos\left(\left(\frac{r_2}{r_0}\right)\varphi\right)}} \rho_{a0}. \quad (4.4)$$

U slučaju da je rezni zupčanik izведен bez zaobljenja vrha glave zuba ( $\rho_{a0} = 0$ ) izraz (4.3) postaje jednak izrazu (4.1), a izraz (4.4) postaje jednak izrazu (4.2). Tada putanja središta zakrivljenosti glave zuba reznog zupčanika postaje identična prijelaznoj krivulji korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.

Kut  $\nu$  definiran je izrazom

$$\nu = \frac{l_0}{r_2} = \frac{r_0}{r_2} \left( \frac{(\pi - 4x_0 \tan \alpha)}{2z_0} - \operatorname{inv} \alpha + \tan \alpha_0 - \arccos\left(\frac{r_0}{r_0 + h_0} \cos \alpha_w\right) \right), \quad (4.5)$$

pri čemu je  $l_0$  duljina luka mјerenog na diobenoj kružnici zupčanika s unutarnjim ozubljenjem između središta međuprostora korijena i središta zakrivljenosti vrha zuba reznog zupčanika, a  $\alpha_w$  je zahvatni kut na kinematskoj kružnici zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.

Zahvatni kut reznog zupčanika  $\alpha_0$  definiran je izrazom

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{r_0}{\sqrt{(r_{a0} - \rho_{a0})^2 + \rho_{a0}^2 + 2\rho_{a0}\sqrt{(r_{a0} - r_0)^2 - (r_0 \cos \alpha_w)^2}} \cos \alpha_w}\right), \quad (4.6)$$

pri čemu je  $r_{a0}$  polumjer preko glave reznog zupčanika.

Kut  $\theta$  između simetrale zuba unutarnjeg ozubljenja i tangente na prijelaznu krivulju korijena u danoj točki prema [48] iznosi

$$\tan \theta = \frac{dX_0}{dY_0} = \frac{\frac{dX_0}{d\varphi}}{\frac{dY_0}{d\varphi}} = \frac{(r_0 + h_0) \cos \left( \varphi + u - \left( \frac{r_2}{r_0} \right) \varphi \right) - r_0 \cos(\varphi + u)}{r_0 \sin(\varphi + u) - (r_0 + h_0) \sin \left( \varphi + u - \left( \frac{r_2}{r_0} \right) \varphi \right)}. \quad (4.7)$$

Time su definirane koordinate točaka na prijelaznoj krivulji korijena zupčanika s unutarnjim ozubljenjem te je moguće pristupiti proračunu naprezanja u korijenu zuba prema [49], [48], [52].

## 4.2 Proračun naprezanja u korijenu zuba unutarnjeg ozubljenja prema [48], [49], [52]

Istraživanjem u radu [49] utvrđeno je da je kritični presjek zuba unutarnjeg ozubljenja određen tangentom prijelazne krivulje korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem koja zatvara kut  $\theta = 45^\circ$  sa simetralom zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem, za razliku od ISO norme [22] koja predviđa  $\theta = 60^\circ$

Točka na prijelaznoj krivulji korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem kroz koju ta tangenta prolazi koristi se za određivanje referentne debljine zuba  $s_{MO}$  i referentnog kraka sile  $l_{MO}$  (Slika 4.3).

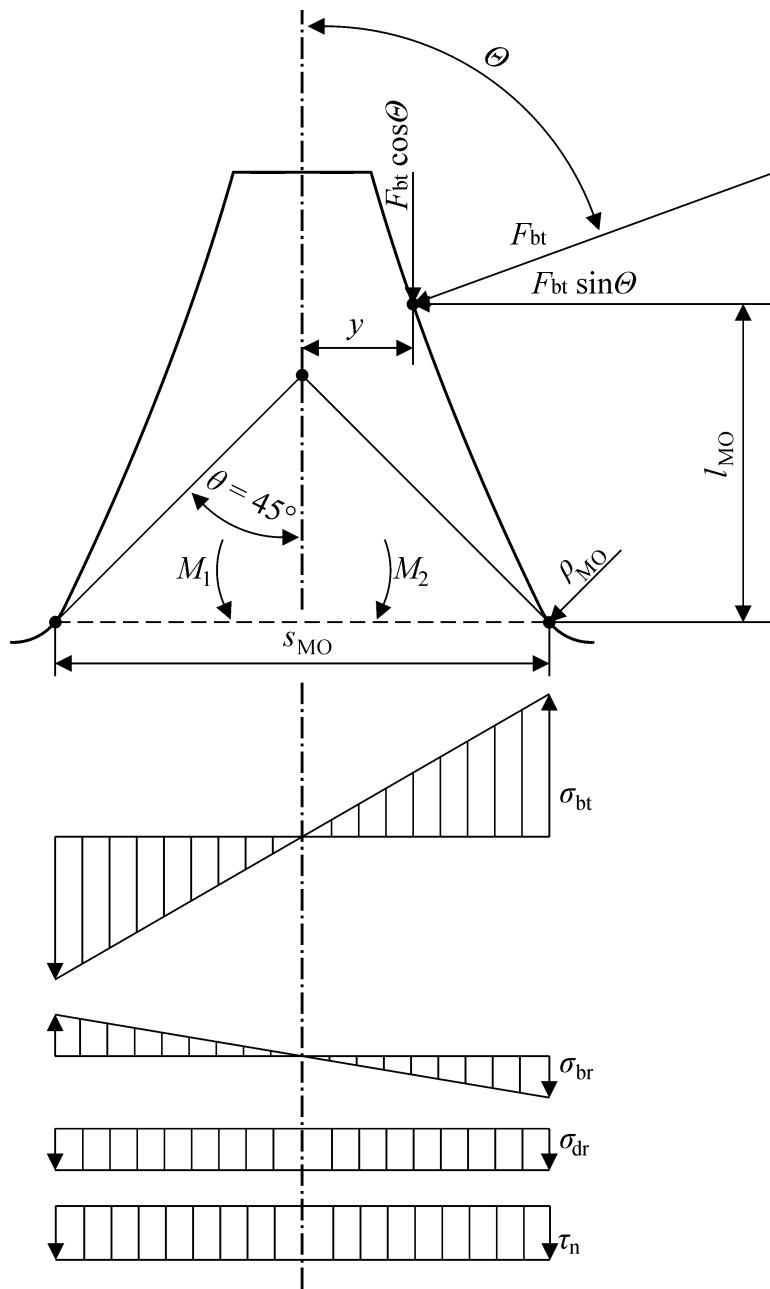
Određivanje položaja te točke započinje rješavanjem izraza (4.7) za  $\theta = 45^\circ$ , čime se dobiva odgovarajuća vrijednost  $\varphi$  za izračunavanje  $X$  (4.3),  $Y$  (4.4) i  $\rho_{MO}$ .

Referentna debljina zuba  $s_{MO}$  računa se putem

$$s_{MO} = 2X, \quad (4.8)$$

dok se referentni krak sile  $l_{MO}$  računa putem

$$l_{MO} = Y - r_2 \frac{\cos \alpha_w}{\cos \alpha_p} \cos \left( \frac{\pi - 4x_2 \tan \alpha}{2z_2} + \operatorname{inv} \alpha_p - \operatorname{inv} \alpha \right). \quad (4.9)$$



Slika 4.3 Mjerodavne veličine za proračun naprezanja prema [49]

Polumjer zakrivljenosti  $\rho_{MO}$  prijelazne krivulje [48] korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zatvara kut  $\theta$  sa simetralom zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem računa se prema izrazu

$$\begin{aligned} \rho_{MO} &= \left| \frac{\left( 1 + \left( \frac{dY_0}{dX_0} \right)^2 \right)^{1,5}}{\frac{d^2 Y_0}{dX_0^2}} \right| = \\ &= \left| \frac{\left( r_0^2 + (r_0 + h_0)^2 + 2r_0(r_0 + h_0)\cos\left(\frac{r_2}{r_0}\varphi\right) \right)^{1,5} \frac{r_2 - r_0}{r_0}}{r_0^2 - (r_0 + h_0)^2 \frac{r_2 - r_0}{r_0} - r_0(r_0 + h_0)\left(2 - \frac{r_2}{r_0}\right)\cos\left(\frac{r_2}{r_0}\varphi\right)} \right| + \rho_{a0} \end{aligned} . \quad (4.10)$$

Udaljenost točke zahvata od simetrale zuba y računa se prema izrazu

$$y = r_2 \frac{\cos \alpha_w}{\cos \alpha_p} \sin\left(\frac{\pi - 4x_2 \tan \alpha}{2z_2} + \operatorname{inv} \alpha_p - \operatorname{inv} \alpha\right), \quad (4.11)$$

dok se kut  $\Theta$  između simetrale zuba i pravca djelovanja sile  $F_{bt}$  računa prema izrazu

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi - 4x_2 \tan \alpha}{2z_2} + \operatorname{inv} \alpha_p - \operatorname{inv} \alpha \right) - \alpha_p. \quad (4.12)$$

Zahvatni kut u trenutačnoj točki zahvata  $\alpha_p$  računa se putem

$$\cos \alpha_p = \frac{d_p}{d} \cos \alpha, \quad (4.13)$$

pri čemu je  $d_p$  promjer na kojem se ta točka nalazi.

Prilikom proračuna naprezanja u korijenu zuba unutarnjeg ozubljenja koristi se sila na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  koja se rastavlja na tangencijalnu komponentu  $F_{bt} \sin \Theta$  i radijalnu komponentu  $F_{bt} \cos \Theta$  (Slika 4.3).

Zbog djelovanja tangencijalne komponente  $F_{bt} \sin \Theta$  u korijenu zuba javljaju se moment  $M_1$ , normalno naprezanje  $\sigma_{bt}$  te smično naprezanje  $\tau_n$ , dok se zbog djelovanja radijalne komponente  $F_{bt} \cos \Theta$  u korijenu zuba javljaju moment  $M_2$ , normalna naprezanja  $\sigma_{br}$  i  $\sigma_{dr}$ . Naprezanja  $\sigma_{br}$  i  $\sigma_{dr}$  mnogo su manja od naprezanja  $\sigma_{bt}$  [17] pa su prikazana u uvećanom omjeru.

U toku zahvata korijen zuba opterećen je na jednoj strani tlačno, a na drugoj strani vlačno. Do loma zuba dolazi na vlačno opterećenoj strani zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem pa su zbog toga navedeni samo izrazi za vlačno opterećenu stranu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.

Normalno naprezanje u korijenu zuba zbog djelovanja tangencijalne komponente sile  $F_{bt} \sin \Theta$  računa se prema izrazu

$$\sigma_{bt} = \frac{6F_{bt}l_{MO} \sin \Theta}{s_{MO}^2 b}. \quad (4.14)$$

Normalno naprezanje u korijenu zuba  $\sigma_r$  zbog djelovanja radijalne komponente sile  $F_{bt} \cos \Theta$  računa se prema izrazu

$$\sigma_r = \sigma_{br} + \sigma_{dr} = -\frac{6F_{bt}y \cos \Theta}{s_{MO}^2 b} - \frac{F_{bt} \cos \Theta}{s_{MO}^2 b} = -\left(1 + \frac{6y}{s_{MO}}\right) \frac{F_{bt} \cos \Theta}{s_{MO} b}. \quad (4.15)$$

Smično naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem računa se prema izrazu

$$\tau_n = \frac{F_{bt} \sin \Theta}{s_{MO} b}. \quad (4.16)$$

U izrazima (4.14)...(4.16)  $b$  označava širinu zupčanika.

U radovima [49], [48], [52] provedeno je fotoelastično ispitivanje modela zupčanika s unutarnjim ozubljenjem te su rezultati tog ispitivanja provjereni metodom konačnih elemenata. Pri tome je utvrđeno da postoje razlike između vrijednosti naprezanja izračunatih putem izraza (4.14)...(4.16) i stvarnih vrijednosti naprezanja u korijenu zuba određenih fotoelastičnim ispitivanjem pa su izračunati faktori koncentracije naprezanja [49], [48], [52].

Faktor koncentracije normalnog naprezanja  $\sigma_{bt}$  zbog djelovanja tangencijalne komponente sile  $F_{bt} \sin \Theta$  računa se putem izraza

$$a_{nt} = 1 + 0,046 \frac{s_{MO}}{\rho_{MO}} . \quad (4.17)$$

Faktor koncentracije normalnog naprezanja  $\sigma_{br}$  zbog djelovanja radijalne komponente sile  $F_{bt} \cos \Theta$  računa se putem izraza

$$a_{nr} = a_{nt} \left( 0,67 + 0,48 \sqrt{1 + \left( \frac{s_{MO}}{l_{MO}} \right)^2} \right) \quad (4.18)$$

za slučaj  $\frac{l_{MO}}{s_{MO}} \geq 0,6$  te putem izraza

$$a_{nr} = a_{nt} \left( 1,05 + 0,29 \sqrt{1 + \left( \frac{s_{MO}}{l_{MO}} \right)^2} \right) \quad (4.19)$$

za slučaj  $0,2 \leq \frac{l_{MO}}{s_{MO}} < 0,6$ .

Faktor koncentracije normalnog naprezanja  $\sigma_{dr}$  zbog djelovanja radijalne komponente sile  $F_{bt} \cos \Theta$  računa se prema izrazu

$$a_{nd} = 1,14 a_{nt} . \quad (4.20)$$

Međusobna zavisnost smičnog naprezanja  $\tau_n$  u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem i normalnog naprezanja  $\sigma_{bt}$  u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem zbog djelovanja tangencijalne komponente sile  $F_{bt} \sin \Theta$  dana je izrazom

$$\tau_n = \frac{s_{MO}}{6l_{MO}} \sigma_{bt} . \quad (4.21)$$

Ukupno normalno naprezanje  $\sigma_{fn}$  u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem računa se prema izrazu

$$\sigma_{fn} = a_{nt} \left( 0,67\sigma_{bt} + 0,48\sqrt{0,67\sigma_{bt}^2 + 36\tau_n^2} + 1,14\sigma_r \right), \quad (4.22)$$

koji se može napisati u proširenom obliku

$$\sigma_{fn} = \left( 1 + 0,046 \frac{s_{MO}}{\rho_{MO}} \right) \left( 0,67\sigma_{bt} + 0,48\sqrt{0,67\sigma_{bt}^2 + \frac{s_{MO}^2}{l_{MO}^2}\sigma_{bt}^2} + 1,14\sigma_r \right). \quad (4.23)$$

U radu [52] izraz (4.23) preračunat je u jednostavniji oblik

$$\sigma_{fn} = A \frac{F_{bt}}{m_n b}, \quad (4.24)$$

pri čemu je:

$$A = \left( 1 + 0,046 \frac{s_{MO}}{\rho_{MO}} \right) \left( 0,67A_a + 0,48\sqrt{A_a^2 + 36A_b^2} + 1,14A_c \right), \quad (4.25)$$

$$A_a = \frac{\frac{6l_{MO}}{m_n} \sin \Theta}{\left( \frac{s_{MO}}{m_n} \right)^2}, \quad (4.26)$$

$$A_b = \frac{\sin \Theta}{\left( \frac{s_{MO}}{m_n} \right)}, \quad (4.27)$$

$$A_c = - \left( 1 + \frac{\frac{6y}{m_n}}{\left( \frac{s_{MO}}{m_n} \right)} \right) \frac{\cos \Theta}{\left( \frac{s_{MO}}{m_n} \right)}. \quad (4.28)$$

Za korištenje ovog proračuna potrebno je poznavati geometriju reznog zupčanika upotrijebljenog za izradu zupčanika s unutarnjim ozubljenjem, zbog čega ovaj postupak

---

proračuna nije ograničen samo na zupčanike sa zahvatnim kutom  $\alpha = 20^\circ$  kao proračun prema normi [22]. Ograničenja u pogledu stupnja prekrivanja profila kao kod proračuna prema normi [22] ne postoje pa je ovim postupkom proračuna moguće proračunavati naprezanje u korijenu zuba NPP i VPP zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.

Izraz (4.7) potrebno je zbog složenosti riješiti numerički. Zbog toga je proračun prema [49], [48], [52] računski složeniji od proračuna prema [22], no pogodan za računalnu primjenu.

Zbog svih navedenih razloga, očekuje se da će ovaj postupak proračuna davati točnije rezultate prilikom proračuna VPP zupčanika s unutarnjim ozubljenjem nego proračun prema normi [22].

### 4.3 Proračun elastične deformacije zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem

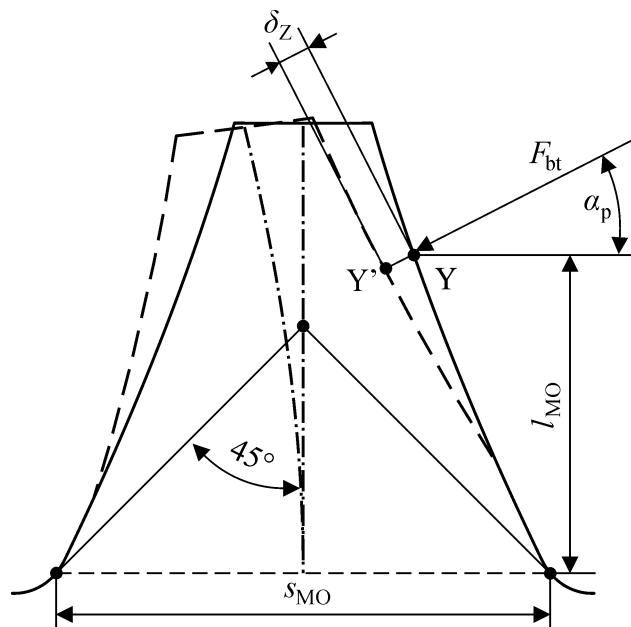
U radu [51] izvedene su formule za proračun elastične deformacije zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. Te formule su dobivene postupkom sličnim postupku u [66] te analizom i uspoređivanjem s rezultatima dobivenim metodom konačnih elemenata.

Prema radu [51], ukupnu deformaciju zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem  $\delta$  moguće je raščlaniti na deformaciju zuba zupčanika  $\delta_Z$  (Slika 4.4), deformaciju tijela zupčanika  $\delta_{RK}$  (Slika 4.5) i Hertzovu deformaciju kontaktnog područja  $\delta_H$  (Slika 4.6). To znači da se ukupna elastična deformacija zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem sastoji od elastične deformacije zuba zupčanika i njegovog pomaka kao krutog tijela, kao i kod zupčanika s vanjskim ozubljenjem [35].

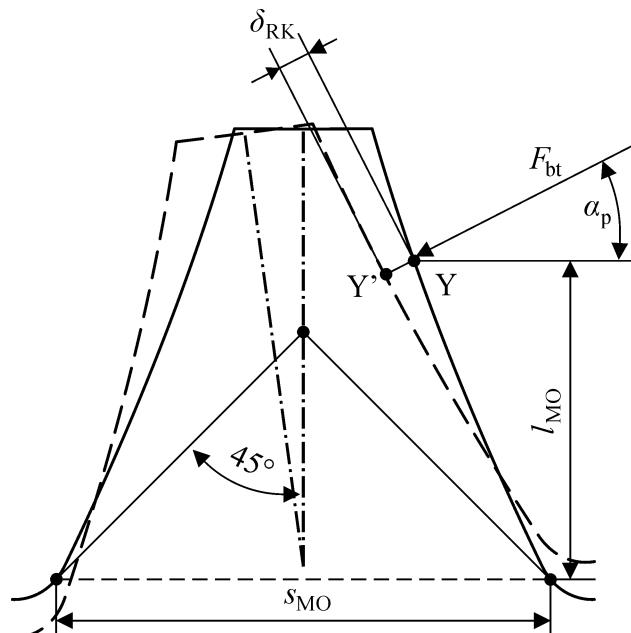
Prilikom određivanja deformacije zuba zupčanika  $\delta_Z$  u radu [51] prepostavljeno je da se deformira samo Zub zupčanika te da je tijelo zupčanika absolutno kruto, dok je prilikom određivanja deformacije tijela zupčanika  $\delta_{RK}$  prepostavljeno da je Zub zupčanika absolutno krut te da se deformira samo tijelo zupčanika.

Istraživanjem u radu [51] dobiven je izraz za proračunavanje deformacije zuba zupčanika  $\delta_Z$  i deformacije tijela zupčanika  $\delta_{RK}$  zajedno kao jedinstvene deformacije, što je dano izrazom

$$\delta_Z + \delta_{RK} = 1,07 \frac{F_{bt}}{Eb} e^{\frac{3,01 l_{MO}}{s_{MO}}} . \quad (4.29)$$



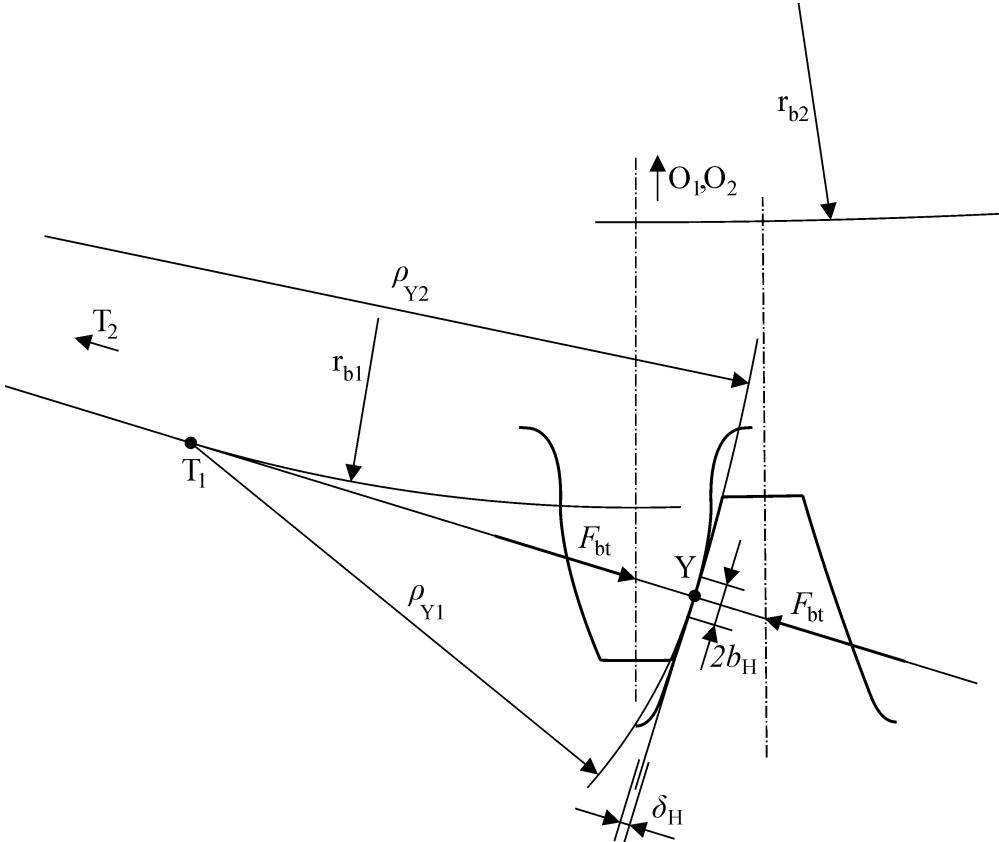
Slika 4.4 Deformacija zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem  $\delta_Z$



Slika 4.5 Deformacija tijela zupčanika s unutarnjim ozubljenjem  $\delta_{RK}$

U izrazu (4.29) referentna debљina zuba  $s_{MO}$  i referentni krak sile  $l_{MO}$  određuju se kao kod proračuna naprezanja u korijenu zuba prema [49], [48], [52].

Deformacija dodirnih površina bokova zuba u [51] određena je Hertzovom metodom (Slika 4.6), pri čemu se dodir bokova zuba u zahvatu promatra kao dodir valjaka.



Slika 4.6 Hertzova deformacija kontaktnog područja  $\delta_H$

Pretpostavljeno je da se deformacija podjednako dijeli na oba zupčanika u zahvatu, te je dobiven izraz

$$\frac{1}{2} \delta_H = \frac{2F_{bt}}{Eb} \left( 1,41 + 0,689 \ln \frac{m_n}{b_H} \right). \quad (4.30)$$

Konačni izraz za izračunavanje elastične deformacije zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem dobiven je spajanjem izraza (4.29) i (4.30) te glasi

$$\delta = \delta_Z + \delta_{RK} + \frac{1}{2} \delta_H = 1,07 \frac{F_{bt}}{Eb} e^{\frac{3,01 l_{MO}}{s_{MO}}} + \frac{2F_{bt}}{Eb} \left( 1,41 + 0,689 \ln \frac{m_n}{b_H} \right). \quad (4.31)$$

Poluširina područja Hertzovog dodira  $b_H$  određuje se prema izrazu [35], [24], [65], [7]

$$b_H = \sqrt{\frac{4F_{bt}\rho_Y}{\pi b E^*}}, \quad (4.32)$$

dok se reducirani modul elastičnosti  $E^*$  određuje putem

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}. \quad (4.33)$$

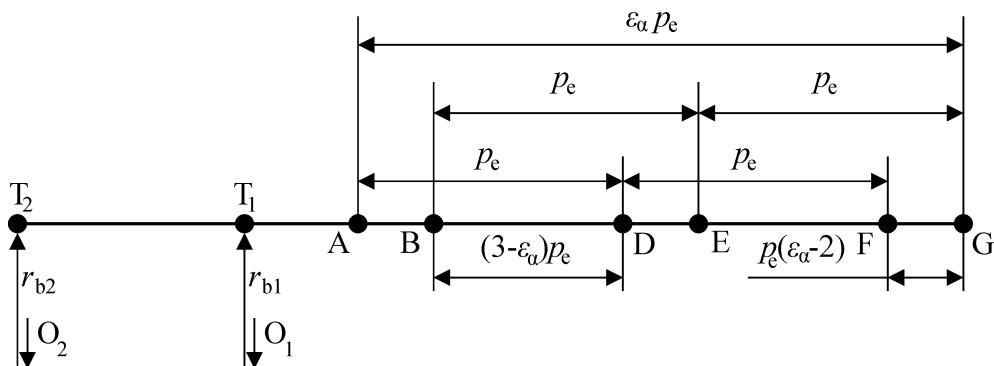
Pri tome je  $E_1$  modul elastičnosti materijala zupčanika s vanjskim ozubljenjem,  $\nu_1$  Poissonov koeficijent materijala zupčanika s vanjskim ozubljenjem,  $E_2$  modul elastičnosti materijala zupčanika s unutarnjim ozubljenjem, a  $\nu_2$  Poissonov koeficijent materijala zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.

Relativni polumjer zakriviljenosti bokova zuba u točki zahvata  $\rho_Y$  računa se prema izrazu

$$\frac{1}{\rho_Y} = \frac{1}{\rho_{Y1}} + \frac{1}{\rho_{Y2}}, \quad (4.34)$$

pri čemu je  $\rho_{Y1}$  polumjer zakriviljenosti boka zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u trenutnoj točki zahvata, a  $\rho_{Y2}$  polumjer zakriviljenosti boka zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u trenutnoj točki zahvata.

Polumjeri zakriviljenosti bokova zubi zupčanika određuju se analizom udaljenosti točaka na zahvatnoj crti zupčanog para (Slika 4.7), što je u ovom slučaju zupčani par s unutarnjim ozubljenjem i velikim stupnjem prekrivanja profila.



Slika 4.7 Zahvatna crta UVPP zupčanog para

Udaljenosti među točkama na zahvatnoj crti UVPP zupčanog para računaju se prema izrazima:

$$|\overline{T_1G}| = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}, \quad (4.35)$$

$$|\overline{T_2A}| = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}, \quad (4.36)$$

$$|\overline{T_1T_2}| = |(r_1 + r_2) \sin \alpha|, \quad (4.37)$$

$$g = |\overline{AG}| = |\overline{T_1G}| + |\overline{T_2A}| - |\overline{T_1T_2}|, \quad (4.38)$$

$$p_e = m\pi \cos \alpha. \quad (4.39)$$

Udaljenosti točaka na zahvatnoj crti od točke  $T_1$  jednake su polumjerima zakrivljenosti boka zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u tim točkama zahvata, dok su udaljenosti točaka na zahvatnoj crti od točke  $T_2$  jednake polumjerima zakrivljenosti bokova zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u tim točkama zahvata (Slika 4.8).

Polumjeri zakrivljenosti računaju se izrazima:

$$\rho_{A1} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - \varepsilon_a p_e, \quad (4.40)$$

$$\rho_{B1} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - 2p_e, \quad (4.41)$$

$$\rho_{D1} = \rho_{A1} + p_e, \quad (4.42)$$

$$\rho_{E1} = \rho_{B1} + p_e, \quad (4.43)$$

$$\rho_{F1} = \rho_{A1} + 2p_e, \quad (4.44)$$

$$\rho_{G1} = \rho_{B1} + 2p_e, \quad (4.45)$$

$$\rho_{A2} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}, \quad (4.46)$$

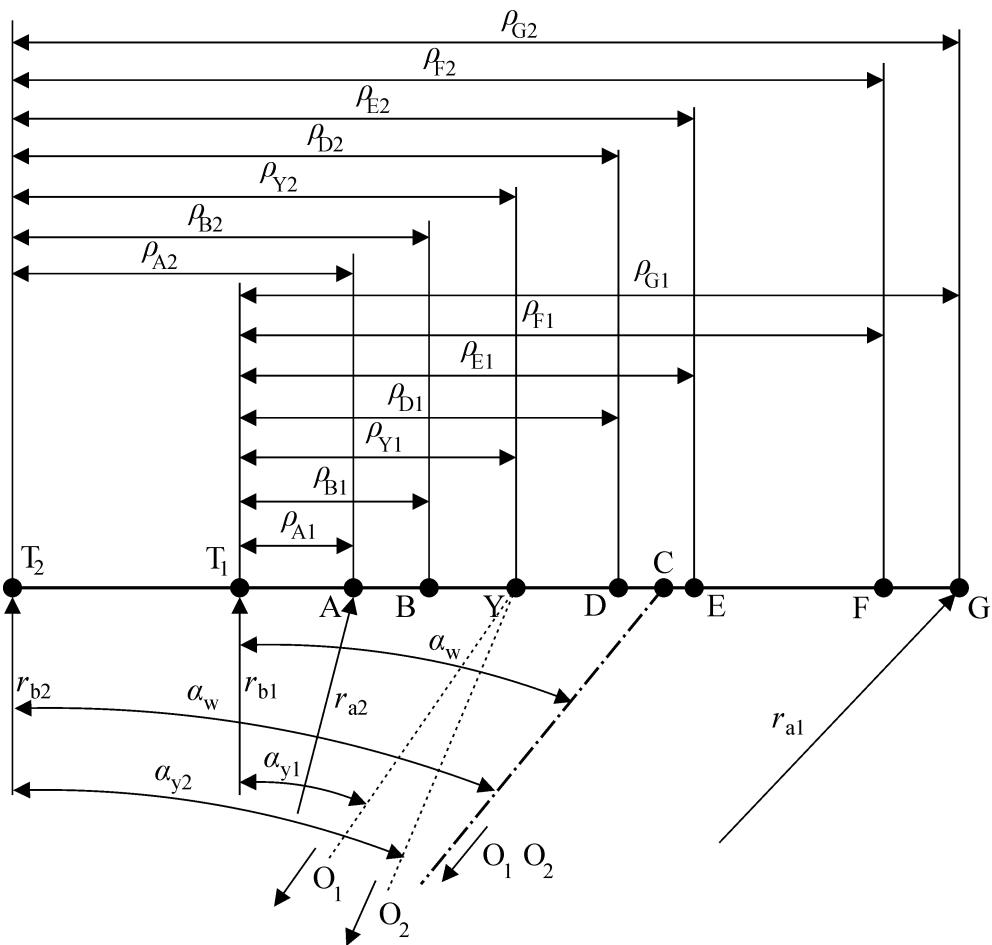
$$\rho_{B2} = \rho_{A2} + p_e (\varepsilon_a - 2), \quad (4.47)$$

$$\rho_{D2} = \rho_{A2} + p_e, \quad (4.48)$$

$$\rho_{E2} = \rho_{B2} + p_e, \quad (4.49)$$

$$\rho_{F2} = \rho_{A2} + 2p_e, \quad (4.50)$$

$$\rho_{G2} = \rho_{B2} + 2p_e. \quad (4.51)$$



Slika 4.8 Polumjeri zakriviljenosti u točkama zahvata za UVPP ozubljenje

Polumjeri zakriviljenosti bokova  $\rho_{Y1}$ ,  $\rho_{Y2}$  u nekoj proizvoljnoj točki zahvata Y određuju se interpoliranjem. Bok zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem je konkavna ploha [24] pa se njen polumjer zakriviljenosti uvrštava u izraz (4.34) kao negativan broj.

#### 4.4 Određivanje raspodjele sile na parove zuba u zahvatu

Za ispravan proračun naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika, potrebno je odrediti raspodjelu sile u zahvatu zupčanika.

Hipotetski se pretpostavlja da je svaki zub u zahvatu VPP zupčanika opterećen sa 50 % sile  $F_{bt}$  tokom dvostrukog zahvata, te sa 33 % sile  $F_{bt}$  tokom trostrukog zahvata [35].

Zubi zupčanika su elastični pa tijekom zahvata dolazi do deformacije zuba koja nije konstantna u svim točkama zahvata [35], [17]. Zbog toga raspodjelu sile na pojedine parove zuba u zahvatu određuju njihove krutosti  $c'$  [74].

Krutost para zuba u nekoj točki zahvata  $c_i'$  je općenito definirana kao:

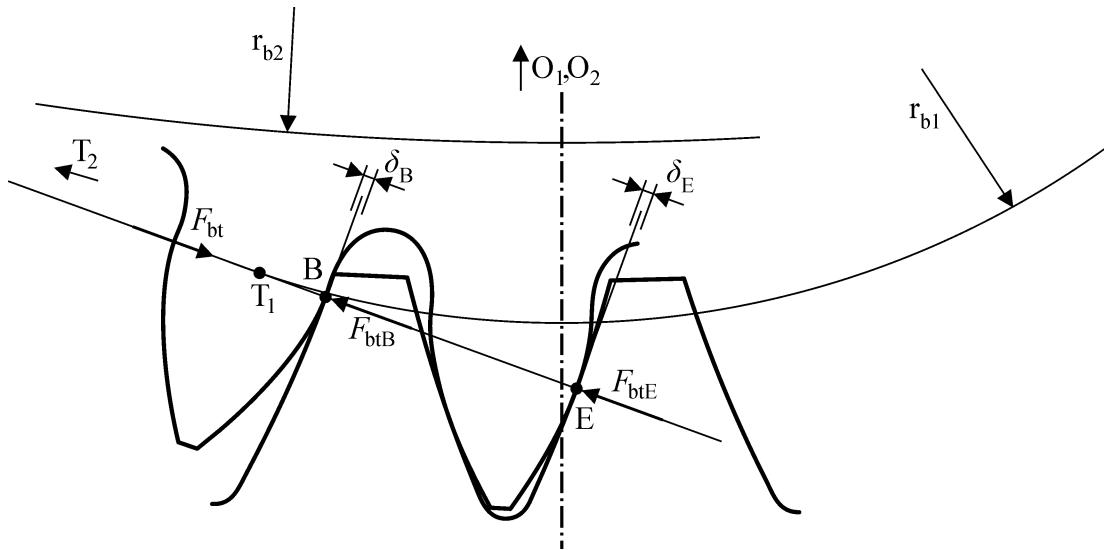
$$c_i' = \frac{F_{bt}}{\delta_i b}, \quad (4.52)$$

pri čemu je  $F_{bt}$  sila na zahvatnoj crti za pojedini par zuba u zahvatu,  $\delta_i$  je deformacija para zuba u toj točki zahvata, a  $b$  je širina zuba zupčanika.

Kod dvostrukog zahvata (Slika 4.9) krutosti prvog ( $c_B'$ ) i drugog ( $c_E'$ ) para zuba u zahvatu iznose:

$$c_B' = \frac{F_{btB}}{\delta_B b}, \quad (4.53)$$

$$c_E' = \frac{F_{btE}}{\delta_E b}. \quad (4.54)$$



Slika 4.9 Deformacija zuba UVPP zupčanog para na početku dvostrukog zahvata B – E

Pri tome vrijedi

$$F_{bt} = F_{btB} + F_{btE}. \quad (4.55)$$

U radu [35], [55] navedeno je da su elastične deformacije parova zuba koji su istovremeno u zahvatu jednake, pa slijedi

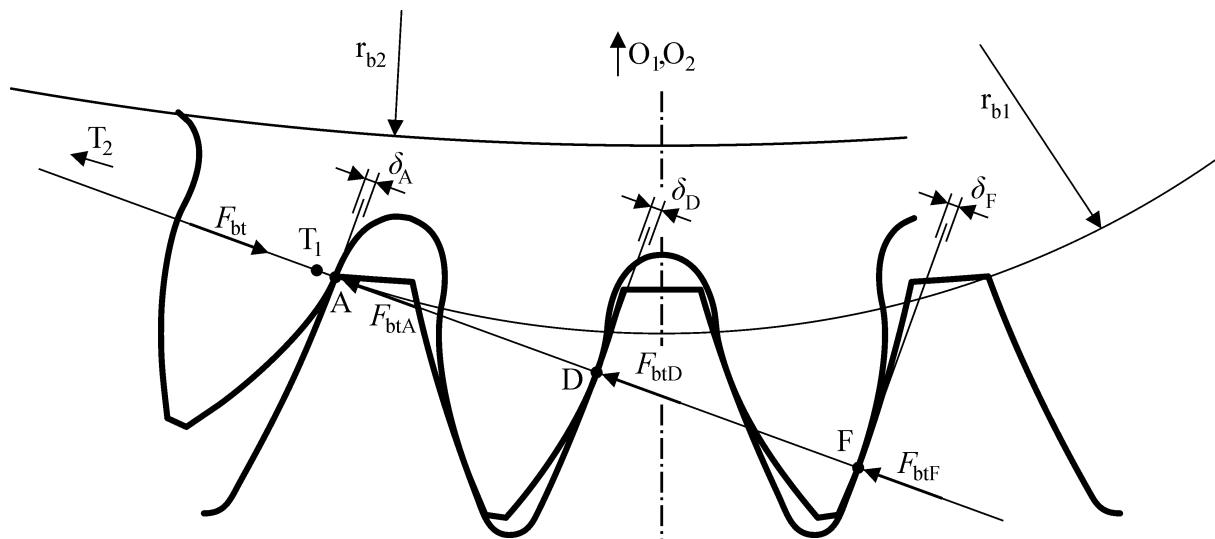
$$\frac{F_{btB}}{c_B' b} = \frac{F_{btE}}{c_E' b}. \quad (4.56)$$

Jednako vrijedi i za trostruki zahvat (Slika 4.10), gdje krutosti u zahvatu prvog ( $c_A'$ ), drugog ( $c_D'$ ) i trećeg ( $c_F'$ ) para zuba iznose:

$$c_A' = \frac{F_{btA}}{\delta_A b}, \quad (4.57)$$

$$c_D' = \frac{F_{btD}}{\delta_D b}, \quad (4.58)$$

$$c_F' = \frac{F_{btF}}{\delta_F b}. \quad (4.59)$$



Slika 4.10 Deformacija zuba UVPP zupčanog para na početku trostrukog zahvata  
A – D – F

I ovdje je uvjet

$$F_{bt} = F_{btA} + F_{btD} + F_{btF} \quad (4.60)$$

pa prema [35], [55] vrijedi

$$\frac{F_{btA}}{c_A'b} = \frac{F_{btD}}{c_D'b} = \frac{F_{btF}}{c_F'b}. \quad (4.61)$$

Navedeni izrazi upotrijebljeni su u [35] za utvrđivanje teoretske raspodjele sile u zahvatu ozubljenja s velikim stupnjem prekrivanja profila.

U radu [51] utvrđeno je da je deformacija zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem proporcionalna sili na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ , što znači da se pod opterećenjem ponašaju slično zupčanicima s vanjskim ozubljenjem. Zbog toga se pretpostavlja da iste zakonitosti vrijede i kod unutarnjeg ozubljenja.

Izrazi (4.55) i (4.60) koriste se prilikom analize rezultata dobivenih putem metode konačnih elemenata za izračun raspodjele sile u zahvatu zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. Zbog ograničenja programa za ispitivanje metodom konačnih elemenata, prilikom ispitivanja potrebno je zadati deformaciju modela zupčanika umjesto sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  [7]. Na temelju deformacije zupčanika izračunavaju se sile na zahvatnoj crti  $F_{bti}$  u točkama zahvata zupčanika, a odgovarajući izraz (4.55 ili 4.60) tada se koristi za provjeru ukupne vrijednosti sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ , što je i učinjeno prilikom analize objašnjene u poglavljju 5 ovog rada.

## 4.5 Proračun naprezanja na boku zuba s unutarnjim ozubljenjem

Prilikom analize izraza za naprezanje na boku zuba unutarnjeg ozubljenja prema ISO 6336 [22] provedene u poglavljju 3 ovog rada, uočeno je da su polazne vrijednosti za proračun naprezanja na boku zuba zupčanika obodna sila  $F_t$ , širina zuba  $b$ , omjer broja zuba  $u$  te utjecajni faktori  $Z_H$ ,  $Z_E$ ,  $Z_c$  i  $Z_\beta$ . Zbog toga je potreban izraz za proračun naprezanja na boku zuba zupčanika koji je utemeljen na Hertzovom zakonu naprezanja i koristi vrijednosti polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika u točki zahvata.

Uvrštavanjem punih izraza za faktor elastičnosti  $Z_E$ ,

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}}, \quad (4.62)$$

faktor zone  $Z_H$ ,

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cos \beta_b \cos \alpha_{wt}}{\cos^2 \alpha_t \sin \alpha_{wt}}} , \quad (4.63)$$

faktor kuta nagiba zuba  $Z_\beta$ ,

$$Z_\beta = \sqrt{\cos \beta} \quad (4.64)$$

i obodnu silu  $F_t$ ,

$$F_t = F_{bt} \cos \alpha_t \quad (4.65)$$

u izraz za naprezanje na boku zuba zupčanika prema normi ISO 6336 (3.3) dobiven je izraz za kontaktno naprezanje  $\sigma_{H0}$  u kinematskom polu C pri dodiru dva boka evolventnog ozubljenja s ravnim zubima

$$\sigma_{H0} = Z_\varepsilon \sqrt{\frac{2 \cos \alpha_{wt}}{\cos \alpha_t \sin \alpha_{wt}} \frac{1}{\pi \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)} \frac{F_{bt}}{d_1 b} \frac{u+1}{u}} . \quad (4.66)$$

Prema [44], dodir bokova evolventnih zupčanika moguće je promatrati kao dodir valjaka odgovarajućih polumjera zakriviljenosti.

Polumjeri zakriviljenosti boka zuba u nekoj točki dodira izračunavaju se prema izrazima:

$$\rho_{Y1} = r_{b1} \tan \alpha_{wt} , \quad (4.67)$$

$$\rho_{Y2} = r_{b2} \tan \alpha_{wt} , \quad (4.68)$$

$$\rho_{Y1} + \rho_{Y2} = (r_{w1} + r_{w2}) \tan \alpha_{wt} . \quad (4.69)$$

Omjer broja zuba zupčanika  $u$  jednak je omjeru odgovarajućih polumjera zupčanika zupčanog para

$$u = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} . \quad (4.70)$$

Izraz (4.34) raspisuje se u

$$\frac{1}{\rho_Y} = \frac{(\rho_{Y1} + \rho_{Y2})}{\rho_{Y1}\rho_{Y2}}, \quad (4.71)$$

nakon čega se uvrštavaju izrazi (4.67...4.70) pa slijedi

$$\frac{1}{\rho_Y} = \frac{r_{w1}(u+1)\sin\alpha_{wt}}{ur_{bl}^2 \tan^2\alpha_{wt}} . \quad (4.72)$$

Uvrštavanjem izraza

$$r_{w1} = r_1 \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}} \quad (4.73)$$

i

$$r_{bl} = r_1 \cos\alpha_t , \quad (4.74)$$

izraz (4.54) prelazi u oblik

$$\frac{1}{\rho_Y} = \frac{(u+1)}{u} \frac{2}{d_1} \frac{1}{\cos\alpha_t} \frac{\cos\alpha_{wt}}{\sin\alpha_{wt}} . \quad (4.75)$$

Uvrštavanjem izraza (4.72) u izraz (4.66) dobiva se izraz za naprezanje na boku zuba zupčanika

$$\sigma_{H0} = Z_e \sqrt{\frac{F_{bt}}{\rho_Y b} \frac{E_1 E_2}{\pi E_2 (1 - \nu_1^2) + E_1 (1 - \nu_2^2)}}. \quad (4.76)$$

U slučaju kada su oba zupčanika izrađena od istog materijala, izraz (4.76) prelazi u oblik

$$\sigma_{H0} = Z_e \sqrt{\frac{F_{bt} E}{2\pi\rho_Y b (1 - \nu^2)}}. \quad (4.77)$$

U izrazima (4.48, 4.76 i 4.77) faktor  $Z_e$  je istovjetan faktoru iz norme ISO 6336, čime je uzet u obzir utjecaj stupnja prekrivanja profila na naprezanje na boku zuba VPP ozubljenja.

Izraz (4.77) upotrijebljen je u [35], [55] i [73] za izračunavanje naprezanja uzduž boka zuba u zahvatu, čime je potvrđena njegova točnost. Kako je izraz (4.77) utemeljen na Hertzovoj teoriji naprezanja, može se koristiti i u slučajevima konveksno – konkavnog dodira bokova zuba, što je slučaj kod zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem.

Zbog konveksno – konkavnog dodira potrebno je razmotriti slučaj u kojem je u izrazu (4.34)  $\rho_Y = 0$  ili  $\rho_Y \approx 0$ , zbog čega bi u (4.77) slijedilo  $\sigma_{H0} = \infty$ , što je nemoguće.

Kod zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem to bi značilo da su apsolutne vrijednosti brojeva zuba zupčanika  $z_1$  i  $z_2$  jednake ili vrlo bliske jedna drugoj (razlika od jedan do dva zuba) pa bi točke  $T_1$  i  $T_2$  (Slika 4.3) bile identične ili vrlo blizu jedna drugoj.

Takav slučaj nije moguć kod zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem zbog uvjeta sastavljanosti  $|z_2| \geq |z_1 + 10|$  za aksijalnu montažu ili  $|z_2| \geq |z_1 + 15|$  za radijalnu montažu zupčanog para [44].

Zbog navedenih razloga, očekuje se da će ovim postupkom proračuna dobiti točniji rezultati prilikom proračuna naprezanja na boku zuba VPP zupčanika s unutarnjim ozubljenjem nego korištenjem proračuna prema normi [22].

## 4.6 Računalni proračun naprezanja u korijenu i na boku zuba

Izrazi iz poglavlja 3 i 4 implementirani su u softver ZupcanikUVPP korištenjem računalnog programa Microsoft Excel 2013. Time je omogućen jednostavniji i brži proračun naprezanja u

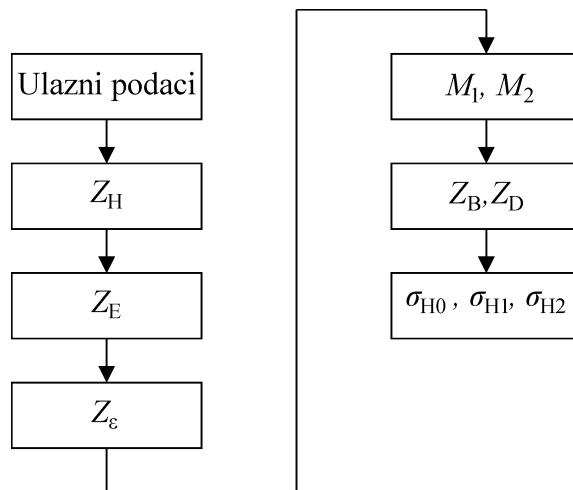
---

korijenu zuba i naprezanja na boku zuba prema normi [22], proračun naprezanja u korijenu zuba prema [49], [48], [52] te proračun naprezanja na boku zuba prema [35], [44], [55], [24].

Ulagni podaci za računalni proračun naprezanja u korijenu zuba i naprezanja na boku zuba su:  $F_t$ ,  $\alpha_n$ ,  $\beta$ ,  $m_n$ ,  $x_{1,2}$ ,  $z_{1,2}$ ,  $d_{n1,2}$ ,  $d_{bn1,2}$ ,  $d_{fn1,2}$ ,  $a_n$ ,  $d_{w1,2}$ ,  $\varepsilon_a$ ,  $h_{a0}^*$ ,  $\rho_{a0}^*$ ,  $c_0^*$ ,  $x_0$ ,  $z_0$ ,  $d_{a0}$ ,  $h_{fp}^*$ ,  $h_{ap}^*$ ,  $\rho_{fp}^*$  te  $r_{a0}$ .

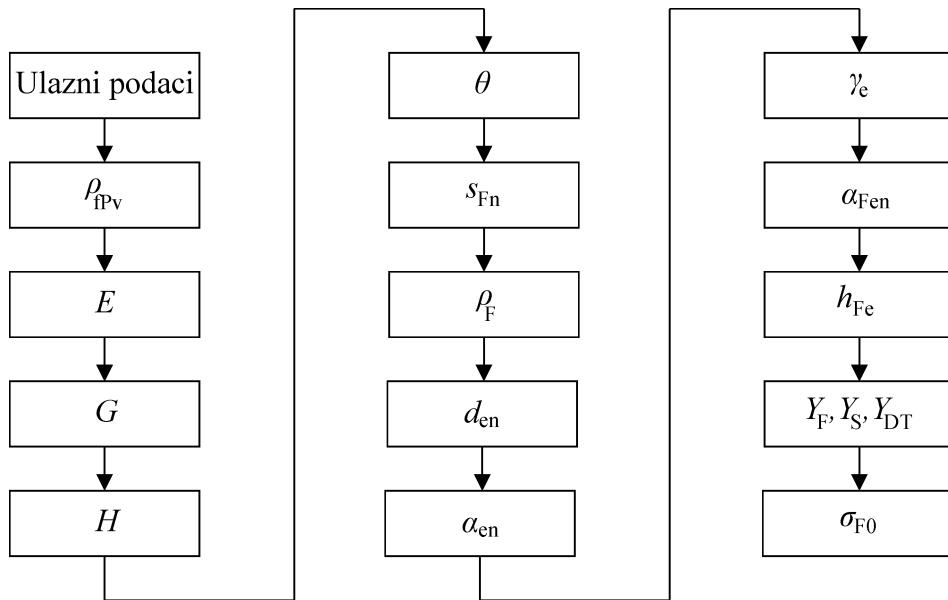
Dijagram toka proračuna naprezanja u korijenu zuba prema normi [22] prikazan je na slici 4.11.

Na temelju ulaznih podataka izračunavaju se faktori  $Z_H$ ,  $Z_E$  i  $Z_e$ . U sljedećem koraku izračunavaju se vrijednosti pomoćnih faktora  $M_1$  i  $M_2$ . Na temelju vrijednosti pomoćnih faktora  $M_1$  i  $M_2$  određuju se vrijednosti faktora  $Z_B$  i  $Z_D$ . U konačnici se izračunavaju vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika  $\sigma_{H0}$ ,  $\sigma_{H1}$  i  $\sigma_{H2}$ .



Slika 4.11 Dijagram toka proračuna naprezanja na boku zuba zupčanika VPP i NPP ozubljenja prema normi ISO 6336

Dijagram toka proračuna naprezanja na boku zuba prema normi [22] prikazan je na slici 4.12. Na temelju ulaznih podataka izračunavaju se računski polumjer zakriviljenosti korijena osnovnog profila  $\rho_{fpv}$ , udaljenost središta zakriviljenosti krivulje korijena osnovnog profila zupčanika od simetrale  $E$ , pomoćne vrijednosti  $G$  i  $H$ , te pomoćni kut  $\theta$ .



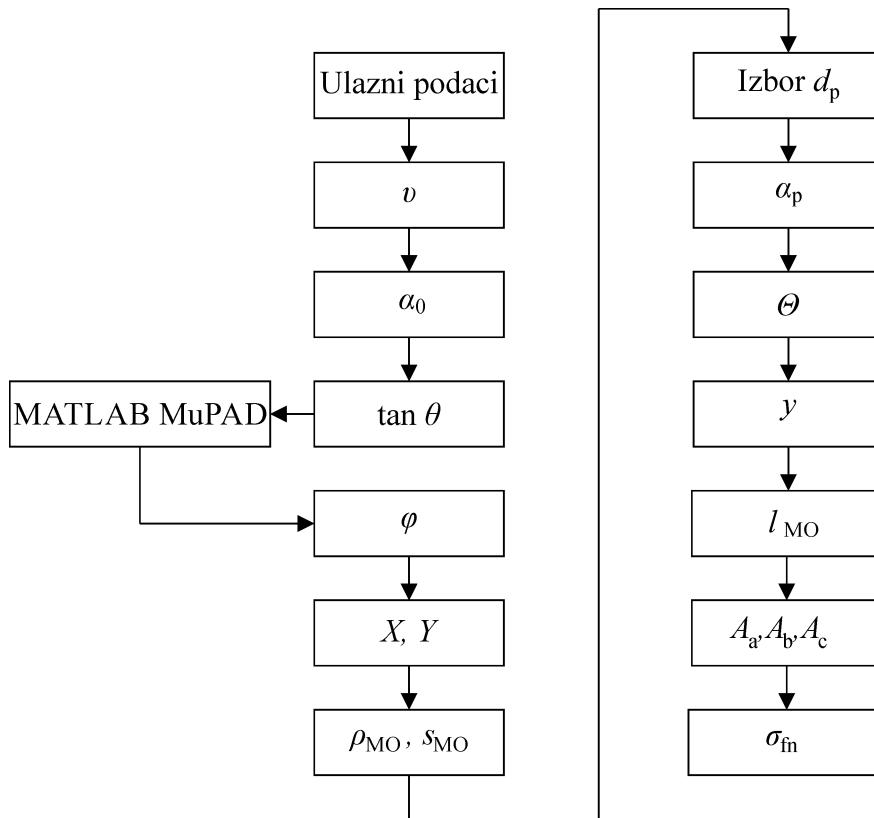
Slika 4.12 Dijagram toka proračuna naprezanja u korijenu zuba za NPP i VPP ozubljenje prema normi ISO 6336

Nakon toga izračunavaju se širina zuba u kritičnom presjeku  $s_{Fn}$ , polumjer zakrivljenosti prijelazne krivulje korijena zuba zupčanika  $\rho_F$ , promjer hvatišta sile  $d_{en}$ , pomoći kut  $\alpha_{en}$ , pomoći kut zahvata  $\gamma_e$  i kut djelovanja sile  $\alpha_{Fen}$ . U konačnici određuju se krak sile  $h_{Fe}$ , utjecajni faktori  $Y_F$ ,  $Y_S$  i  $Y_{DT}$  te naprezanje u korijenu zuba zupčanika  $\sigma_{F0}$ .

Dijagram toka proračuna naprezanja u korijenu zuba zupčanika prema [49], [48], [52] prikazan je na slici 4.13.

Proračun naprezanja u korijenu zuba unutarnjeg ozubljenja prema [49], [48], [52] započinje izračunavanjem vrijednosti kutova  $v$  i  $\alpha_0$ . Te vrijednosti unose se u izraz (4.7) koji se numerički rješava uz vrijednost kuta  $\theta = 45^\circ$  u programskom paketu MATLAB te se dobiva vrijednost kuta zakretanja zupčanika  $\varphi$ .

Nakon toga izračunavaju se koordinate  $X$ ,  $Y$  točke na prijelaznoj krivulji korijena unutarnjeg ozubljenja u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zatvara kut od  $45^\circ$  sa simetralom zuba. Izračunavaju se polumjer zakrivljenosti korijena zuba  $\rho_{MO}$ , te referentna debljina zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem  $s_{MO}$ .

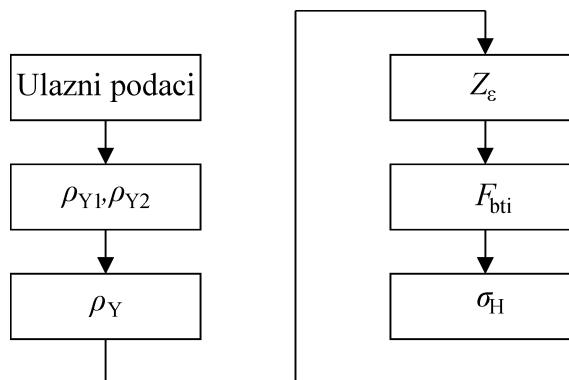


Slika 4.13 Dijagram toka proračuna naprezanja u korijenu zuba prema [49], [48], [52]

Izabire se željena točka na boku zuba zupčanika i njoj odgovarajući promjer  $d_p$ , nakon čega se izračunavaju vrijednosti kutova  $\alpha_p$  i  $\Theta$ , udaljenost točke zahvata od simetrale zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem  $y$  te referentni krak sile  $l_{MO}$ .

U konačnici izračunavaju se vrijednosti faktora  $A_a$ ,  $A_b$  i  $A_c$  te vrijednost naprezanja u korijenu zuba s unutarnjim ozubljenjem  $\sigma_{fn}$ .

Dijagram toka proračuna naprezanja u korijenu zuba zupčanika prema [24], [35], [55], [73] prikazan je na slici 4.14.



Slika 4.14 Dijagram toka proračuna naprezanja na boku zuba prema [24], [35], [55], [73]

Prilikom proračuna vrijednosti naprezanja na boku zuba prema [24], [35], [55] prvo se izračunavaju vrijednosti polumjera zakriviljenosti bokova malog i velikog zupčanika u trenutnoj točki zahvata  $\rho_{Y1}$  i  $\rho_{Y2}$ , nakon čega se izračunava ukupni polumjer zakriviljenosti u trenutnoj točki zahvata  $\rho_Y$ . Izračunava se vrijednosti faktora  $Z_e$  te se uz vrijednost sile  $F_{bti}$  za trenutnu točku zahvata dobiva vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika  $\sigma_H$ .

U nastavku je prikazan rad softvera ZupcanikUVPP tijekom proračuna naprezanja u korijenu i na boku zuba unutarnjeg ozubljenja prema navedenim postupcima proračuna. Ulazni podaci za prikaz rada datoteke navedeni su u tablici 4.1.

Tablica 4.1 Ulazni podaci za primjer rada softvera ZupcanikUVPP

Parametar	Vrijednost
$z_{1,2}$	22/-88
$m_n$	22 mm
$a_n$	20°
$\beta$	0°
$a$	-726 mm
$x_{0,1,2}$	0
$h_{a0}^*_{1,2}$	1,5
$d_{n1,2} = d_{w1,2}$	484/-1936 mm
$d_{an1,2}$	545,6/-1886,3 mm
$d_{bn1,2}$	454,811/-1819,25 mm
$d_{fn1,2}$	418/-2002 mm
$\varepsilon_a$	2,306
$\rho_{a0}^*_{1,2}$	0,341/0,259
$c^*_{1,2}$	0,370/0,100
$b$	10 mm
$z_0$	65
$d_{a0}$	1496 mm
$h_{IP}^*$	1,5
$h_{aP}^*$	1,13
$\rho_{IP}^*$	0,259
$\rho_{a0}$	5,705 mm
$T_1$	1000 Nm

Na početku proračuna izračunavaju se duljine dužina  $\overline{T_1G}$ ,  $\overline{T_2A}$ ,  $\overline{T_1T_2}$  i  $\overline{AG}$  te korak zahvata  $p_e$  (Slika 4.7). Dobivene vrijednosti prikazane su u tablici 4.2.

Tablica 4.2 Vrijednosti  $|\overline{T_1G}|$ ,  $|\overline{T_2A}|$ ,  $|\overline{T_1T_2}|$ ,  $|\overline{AG}|$  i  $p_e$

$ \overline{T_1G} $	$ \overline{T_2A} $	$ \overline{T_1T_2} $	$ \overline{AG} $	$p_e$
150,687 mm	249,237 mm	248,307 mm	149,757 mm	64,947 mm

Duljine dužina  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{AE}$  i  $\overline{AF}$  (Tablica 4.3) izračunavaju se pomoću vrijednosti iz tablice 4.2.

Tablica 4.3 Vrijednosti  $|\overline{AB}|$ ,  $|\overline{AD}|$ ,  $|\overline{AE}|$  i  $|\overline{AF}|$

$ \overline{AB} $	$ \overline{AD} $	$ \overline{AE} $	$ \overline{AF} $
19,863 mm	64,947 mm	84,810 mm	129,894 mm

Dijeljenjem vrijednosti iz tablice 4.3. duljinom dužine  $\overline{AG}$  i množenjem tako dobivenih vrijednosti sa vrijednošću stupnja prekrivanja profila  $\epsilon_a$  promatranog zupčanog para određuje se položaj točaka B, D, E i F uzduž zahvatne crte (Tablica 4.4). Položaje točaka A i G nije potrebno posebno određivati jer se te točke nalaze na početku (točka A) i na kraju zahvata (točka G).

Tablica 4.4 Određivanje položaja točaka A, B, D, E, F i G uzduž zahvatne crte

Točka	A	B	D	E	F	G
Omjer	0 $\overline{AG}$	$\overline{AB}$ $\overline{AG}$	$\overline{AD}$ $\overline{AG}$	$\overline{AE}$ $\overline{AG}$	$\overline{AF}$ $\overline{AG}$	$\overline{AG}$ $\overline{AG}$
Vrijednost omjera	0	0,133	0,434	0,566	0,867	1
$\epsilon_a$				2,306		
$g / p_e$	0	0,306	1	1,306	2	2,306

Položaji ostalih točaka uzduž zahvatne crte mogu se odrediti interpolacijom između položaja točaka navedenih u tablici 4.4.

Za izračunavanje vrijednosti naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika potrebno je izračunati vrijednosti sila  $F_{bt}$  i  $F_t$ , što za ovaj zupčani par iznosi  $F_{bt} = 4400 \text{ N}$  i  $F_t = 4135 \text{ N}$ .

Ostale vrijednosti potrebne za izračunavanje naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem prema normi ISO 6336 izračunate su korištenjem odgovarajućih izraza iz poglavlja 3 (Tablica 4.5).

Tablica 4.5 Vrijednosti uz proračun naprezanja u korijenu i na boku zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem prema normi ISO 6336

Parametar	Zupčanik $z_2$	Zupčanik $z_1$
$\rho_{fPv}$	6,764 mm	-
$\rho_{fP}$	-	5,180 mm
$E$	1,278 mm	
$G$	-1,193	-1,265
$H$	-0,556	-0,910
$\theta$	0,576	0,793
$s_{Fn}$	62,581 mm	44,088 mm
$\rho_F$	5,511 mm	12,683 mm
$\beta_b$	0	
$z_n$	-88	22
$\varepsilon_a$	2,306	
$d_n$	-1936 mm	484 mm
$d_{en}$	-1819,61 mm	455,10 mm
$\alpha_{en}$	0,020 rad	0,036 rad
$\gamma_e$	-0,003 rad	0,086 rad
$\alpha_{Fe}$	0,023 rad	-0,051 rad
$h_{Fe}$	47,453 mm	86,860 mm
$Y_F$	1,705	6,269
$q_s$	5,672	1,738
$Y_S$	2,467	1,394
$Y_{DT}$	0,830	
$\sigma_{F0}$	65,62 MPa	136,35 MPa
$M_i$	1,614	

Tablica 4.5 Vrijednosti uz proračun naprezanja u korijenu i na boku zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem prema normi ISO 6336 (nastavak)

Parametar	Zupčanik $z_2$	Zupčanik $z_1$
$Z_D$	1	-
$Z_B$	-	1,614
$\alpha_{wt}$	0,349 rad	
$Z_H$	2,495	
$Z_E$	191,7	
$Z_e$	0,751	
$\sigma_H$	287,64 MPa	464,27 MPa

Naprezanje u korijenu zuba prema [49], [48], [52] računa se pomoću izraza iz poglavlja 4. Postupak započinje izračunavanjem koordinata točke na prijelaznoj krivulji korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zatvara kut od  $45^\circ$  sa simetralom zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem (Tablica 4.6). Kut  $\varphi$  određen je iterativno putem programskog paketa MATLAB.

Tablica 4.6 Parametri potrebni za izračunavanje koordinata točke u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zuba zatvara kut od  $45^\circ$  sa simetralom zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem

Parametar	Vrijednost
$r_0$	715 mm
$\alpha_0$	0,414 rad
$l_0$	16,665 mm
$h_0$	29,910 mm
$v$	-0,031 rad
$\varphi$	-0,015 rad
$\rho_{MO}$	415318,7 mm
$X$	24,774 mm
$Y$	-988,886 mm
$R$	-989,196 mm
$s_{MO}$	49,548 mm

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem  $\sigma_{fn}$  može se izračunati za bilo koju točku na zahvatnoj crti zupčanog para, no prikazat će se samo rezultati za točke A, B, D, E, F i G zbog jednostavnosti prikaza (Tablica 4.7).

Rezultati za točke B, D, E i F prikazani su za slučaj dvostrukog (indeks 2) i trostrukog (indeks 3) zahvata. U primjeru je upotrijebljena hipotetska raspodjela sile u zahvatu uz  $F_{bt} = 4400$  N.

Tablica 4.7 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema [49], [48], [52] u pojedinim točkama zahvata

Parametar	Točka zahvata									
	A	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	G
$\alpha_p$ / rad	0,267	0,288		0,336		0,352		0,395		0,413
$\Theta$ / rad	1,330	1,308		1,258		1,236		1,187		1,165
y / mm	8,969	10,576		15,180		17,669		24,477		28,025
l / mm	45,779	40,353		26,652		20,027		4,003		3,719
$F_{bt}$ / N	1467	2200		1467		2200		1467		
A	3,040	2,696		1,853		1,463		0,561		0,433
$\sigma_{fn}$ / MPa	20,265	17,973	26,959	18,534	12,356	9,751	14,626	5,614	3,743	2,887
$\sigma_{f0}$ / MPa	-			65,62				-		

Radi usporedbe u tablici 4.7 prikazano je i naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem izračunato prema proračunu iz [22] (Tablica 4.5). Vrijednost naprezanja prema proračunu iz [22] veća je od najveće vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema proračunu iz [49], [48], [52] te od vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u promatranoj točki zahvata.

Proračun naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem  $\sigma_{H0}$  provodi se pomoću izraza iz poglavlja 4.

Proračun se provodi kontinuirano za cijeli zahvat. Zbog jednostavnijeg prikaza navedeni su samo rezultati za točke A, B, D, E, F i G, pri čemu su rezultati za točke B, D, E i F prikazani za slučaj dvostrukog (indeks 2) i trostrukog (indeks 3) zahvata (Tablica 4.8). U primjeru se koristi hipotetska raspodjela sile u zahvatu uz  $F_{bt} = 4400$  N.

Radi usporedbe u tablici 4.8 prikazano je i naprezanje na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem izračunato prema proračunu iz [22] (Tablica 4.5). Vrijednost naprezanja prema proračunu iz [22] manja je od najveće vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s

unutarnjim ozubljenjem prema proračunu iz [24], [35], [55] te od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u promatranoj točki zahvata.

Tablica 4.8 Naprezanje na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema [24], [35], [55], u pojedinim točkama zahvata

Parametar	Točka zahvata									
	A	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	G
$\rho_{Y_1}$ / mm	0,929	20,793		65,876		85,740		130,82		148,70
$\rho_{Y_2}$ / mm	-249,24		-269,10		-314,18		-334,05		-379,13	-397,00
$\rho_Y$ / mm	0,933	22,534		83,354		115,35		199,75		237,75
$F_{bt_i}$ / N	1467		2200		1467		2200		1467	
$\sigma_{H0}$ /MPa	1796	366	450	234	190	162	199	151	123	113
$\sigma_H$ /MPa		-		287,64				-		

Proračun naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema [49], [48], [52] nije ograničen samo na slučaj u kojem je zahvatni kut  $\alpha = 20^\circ$  kao kod proračuna prema normi [22]. Nema ni ograničenja stupnja prekrivanja profila  $\varepsilon_\alpha$  kao kod proračuna prema normi [22] pa je ovim postupkom proračuna moguće proračunavati naprezanje u korijenu zuba NPP i VPP zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.

Proračun naprezanja na boku zuba zupčanika upotrijebljen je u radovima [24], [35], [55] i [73] za izračunavanje naprezanja uzduž boka zuba u zahvatu, čime je potvrđena njegova točnost. Postupak proračuna naprezanja na boku zuba zupčanika utemeljen je na Hertzovoj teoriji naprezanja pa se može koristiti i u slučajevima konveksno – konkavnog dodira bokova zuba, što je slučaj kod zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem.

Zbog svih navedenih razloga, očekuje se da će se primjenom navedenih postupaka proračuna postići točniji rezultati prilikom proračuna naprezanja u korijenu i na boku zuba VPP zupčanika s unutarnjim ozubljenjem nego kod proračuna prema normi [22].

Navedene postupke proračuna vrijednosti naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem potrebno je verificirati, što će se provesti fotoelastičnim ispitivanjem modela zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem, a numerička analiza putem metode konačnih elemenata upotrijebit će se za dodatnu verifikaciju rezultata.

Razlog za to leži u opremi koja je bila dostupna prilikom fotoelastičnog ispitivanja modela zupčanika. Ta oprema omogućuje mjerjenje samo razlike glavnih normalnih naprezanja

$\sigma_1 - \sigma_2$ , odnosno glavnog smičnog naprezanja  $\tau_3$  [1], [12] pa je potrebno rezultate proračuna dodatno verificirati metodom konačnih elemenata.

Metodom konačnih elemenata moguće je proračunati naprezanje u bilo kojoj točki zupčanika, a moguće je proračunati i deformacije zupčanika. Zbog toga se metoda konačnih elemenata može koristiti za verifikaciju postupaka proračuna naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika.

Metoda konačnih elemenata i metoda fotoelasticimetrije bit će objašnjene u poglavljima 5 i 6.

## 5. Numerički model za analizu metodom konačnih elemenata

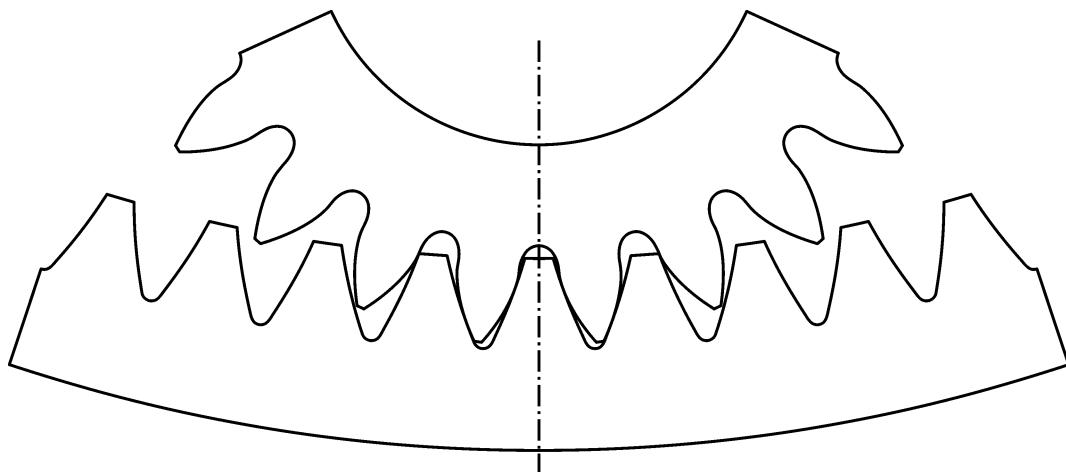
Za provođenje numeričke analize putem metode konačnih elemenata (MKE) izabran je programski paket Ansys 13.0 [4]. Opterećivanjem boka zuba zupčanika koncentriranom silom moguće je dovoljno točno odrediti samo naprezanje u korijenu zuba zupčanika [6]. Pri tome dolazi do deformacije modela na mjestu djelovanja koncentrirane sile pa nije moguć proračun naprezanja na boku zuba zupčanika. Zbog toga je u ovom radu provedena nelinearna kontaktna analiza zupčanika u zahvatu [29], [6], [59].

### 5.1 Geometrijski modeli zupčanika

Profili prijelazne krivulje korijena i boka zuba geometrijskih modela zupčanika izrađeni su pomoću programa VPP\_profil. Taj program izrađen je za potrebe [35] i predstavlja nadgradnju programa GearPac CX 3.5 [45] za potrebe grafičkog prikaza krivulja korijena i boka zuba VPP ozubljenja.

Program VPP\_profil [35] ispisuje profile prijelazne krivulje korijena i boka zuba u .dxf datoteku koja se unosi u programski paket AutoCAD.

U tom programskom paketu profili prijelazne krivulje korijena i boka zuba zupčanika umnožavaju se potreban broj puta i zakreću za potrebnii kut rotacije. Time su dobiveni dvodimenzionalni geometrijski modeli zupčanika (Slika 5.1).



Slika 5.1 Dvodimenzionalni geometrijski modeli zupčanika u zahvatu

Ispravnost zahvata osigurana je odabirom broja zuba modela zupčanika s unutarnjim ozubljenjem, koji je uvjek za dva veći od broja zuba modela s vanjskim ozubljenjem. Geometrijski modeli zupčanika s vanjskim ozubljenjem izrađeni su sa 7, 9 ili 11 zuba dok su geometrijski modeli zupčanika s unutarnjim ozubljenjem izrađeni sa 9, 11 ili 13 zuba. Time je povećana točnost rezultata ispitivanja metodom konačnih elemenata u odnosu na ispitivanja kod kojih se modelira samo jedan Zub zupčanika i optereće koncentriranom silom [53] te u odnosu na ispitivanja kod kojih se bok modela zuba zupčanika optereće valjkom [25].

Prilikom numeričke analize metodom konačnih elemenata potrebno je izbjegći utjecaj debljine vijenca zupčanika na rezultate [21], [10].

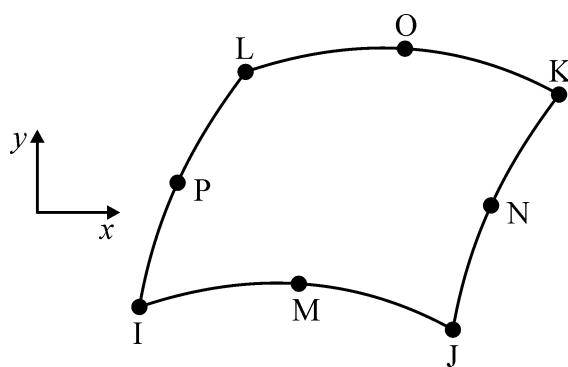
Ukoliko je vijenac zupčanika pretanak, krutost zuba zupčanika bit će veća od krutosti vijenca zupčanika. Zbog toga dolazi do pomaka točke najvećeg naprezanja u korijenu zuba sa prijelazne krivulje korijena zuba na kružnicu korijena u međuprostoru između zuba zupčanika. Ova pojava potpuno izostaje ako je debljina vijenca geometrijskog modela zupčanika ispod promjera preko korijena zuba zupčanika  $d_f$  najmanje pet puta veća od modula zupčanika  $m_n$  [50], [47].

## 5.2 Mreža konačnih elemenata

Unutrašnjost geometrijskog modela zupčanika umrežena je korištenjem četverostranih paraboličnih ravninskih elemenata PLANE 183, dok su dijelovi boka zuba geometrijskog modela zupčanika koji se u promatranom trenutku zahvata nalaze u međusobnom kontaktu

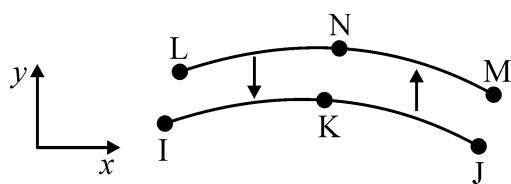
umreženi tročvornim paraboličnim linijskim kontaktnim elementima TARGE 169 i CONTA 172.

PLANE 183 (Slika 5.2) su četverostrani parabolični ravninski elementi definirani sa 8 čvorova. Svakom čvoru omogućena su dva stupnja slobode gibanja (translacije u smjeru koordinatnih osi  $x$  i  $y$ ). Elementi PLANE 183 mogu se upotrijebiti za modeliranje ravninskog stanja naprezanja, ravninske deformacije te osnosimetričnih problema. Od ulaznih podataka moguće je definirati položaje čvorova, debljinu materijala i ortotropnost, dok se od vanjskih opterećenja mogu definirati koncentrirane sile u čvorovima i kontinuirano opterećenje u obliku tlaka koji djeluje na stranice elementa [4].



Slika 5.2 Element PLANE 183

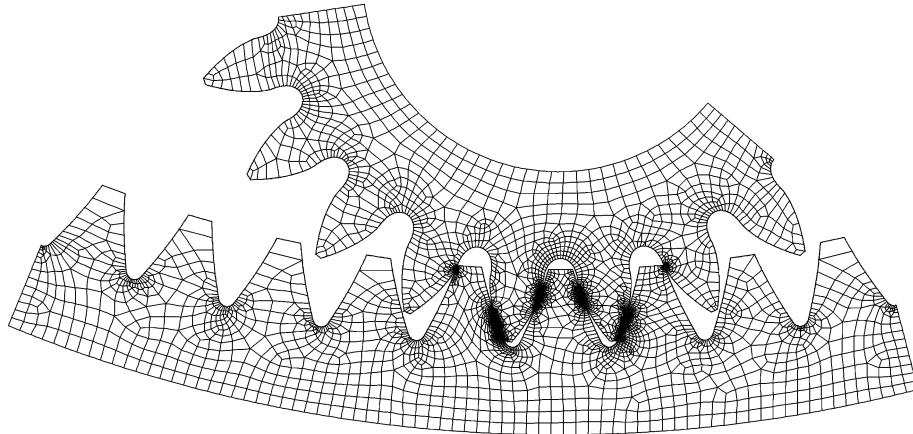
TARGE 169 i CONTA 172 (Slika 5.3) su tročvorni parabolični linijski kontaktni elementi pogodni za analizu ravninskog naprezanja i deformacija. Svakom čvoru omogućena su dva stupnja slobode gibanja (translacije u smjeru koordinatnih osi  $x$  i  $y$ ). Elementi TARGE 169 i CONTA 172 ne mogu se koristiti samostalno, već se vežu na stranice elemenata poput PLANE 183 [4].



Slika 5.3 Elementi TARGE 169 i CONTA 172

Postupak umrežavanja modela elementima PLANE 183 proveden je automatski postupkom *smart meshing* [4] korištenjem elemenata najmanje moguće veličine (Slika 5.4). Mreža

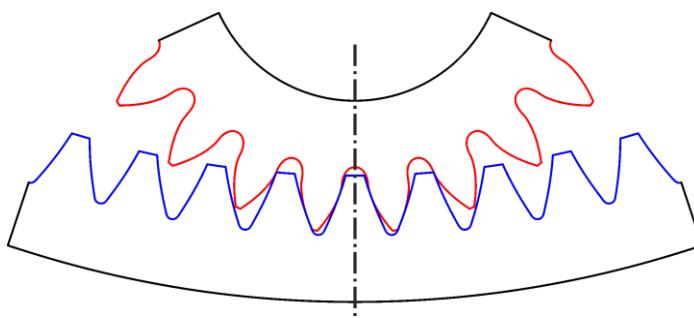
dobivena postupkom *smart meshing* gušća je u područjima u kojima su dva tijela u neposrednoj blizini ili kontaktu, kao i u području prijelazne krivulje korijena zuba zupčanika.



Slika 5.4 Primjer umrežavanja modela zupčanika

U specijaliziranim programima za proračun naprezanja na boku i u korijenu zuba zupčanika metodom konačnih elemenata provodi se detaljna optimizacija mreže [29]. Prilikom izrade ovog rada optimizacija mreže konačnih elemenata nije bila potrebna zbog velike procesorske snage raspoloživog računala.

Parovi kontaktnih elemenata definirani su automatski [4]. Pri tome je konkavna krivulja boka zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem definirana kao *target surface* (Slika 5.5, plavo) dok je konveksna krivulja boka zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem definirana kao *contact surface* (Slika 5.5, crveno).

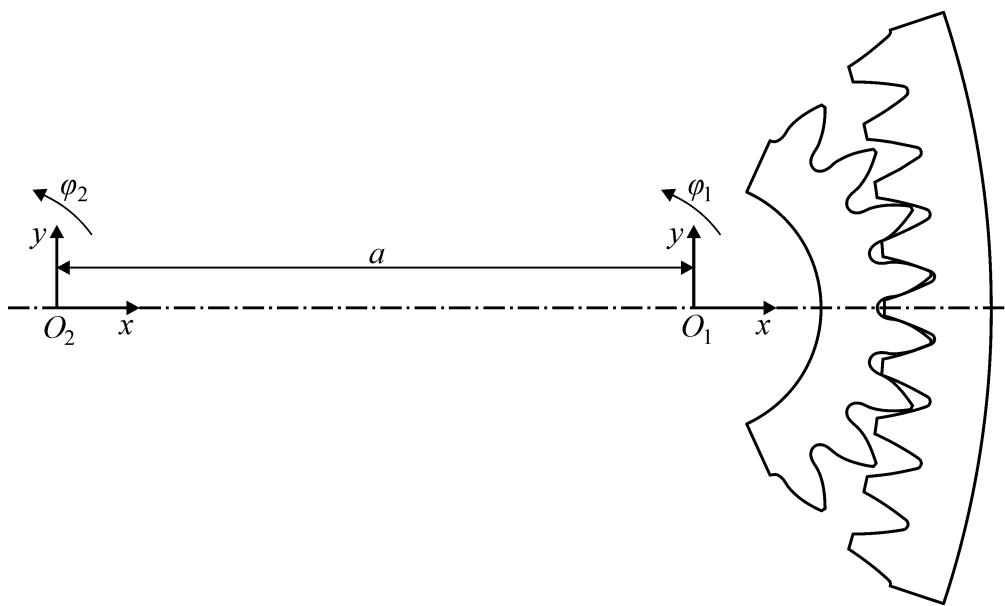


Slika 5.5 Postavljanje kontaktnih elemenata

Osim bokova zuba, kontaktnim elementima prekrivene su i tjemene kružnice geometrijskih modela zupčanika (Slika 5.5). Tako je olakšana automatizirana priprema modela bez utjecaja na rezultat budući da Ansys rješavač sam pronalazi elemente u međusobnom kontaktu te ostale odbacuje [4].

### 5.3 Rubni uvjeti

Modeli zupčanika postavljeni su u željenu točku zahvata zakretanjem oko njihovih osi  $O_1$  i  $O_2$  za odgovarajuće kutove zakretanja  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  (Slika 5.6). Prilikom postavljanja u željenu točku zahvata, modeli zupčanika prvo se postavljaju u točku A prvog trostrukog zahvata pa se odgovarajućim izborom kutova zakretanja  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  dovode u željenu točku zahvata.

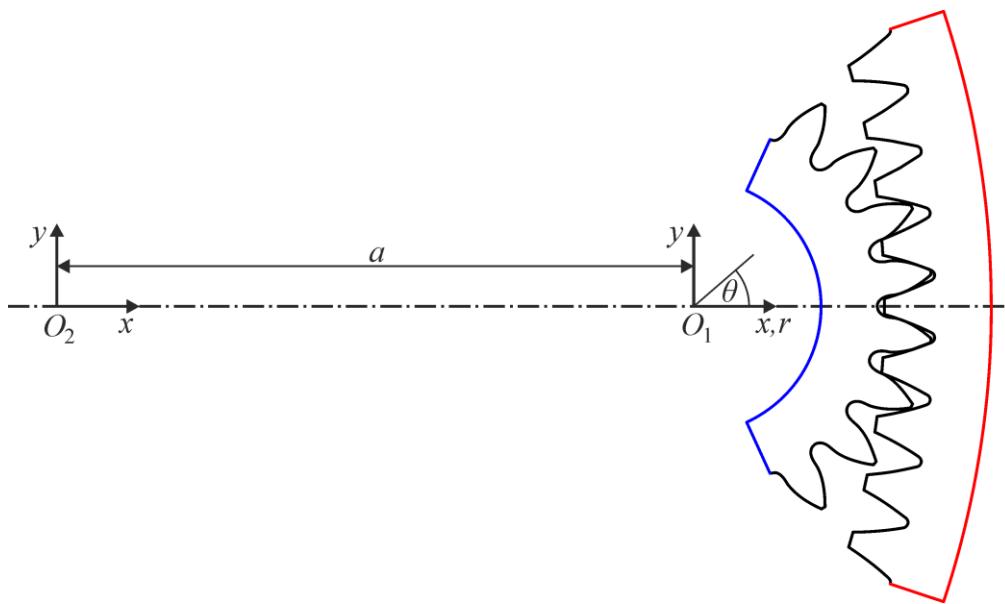


Slika 5.6 Zakretanje modela zupčanika u željenu točku zahvata

Za potrebe izrade ovog rada usvojeno je da se zupčani par s unutarnjim ozubljenjem nalazi u točki A prvog trostrukog zahvata u trenutku kada je vrh glave zuba s unutarnjim ozubljenjem u dodiru s bokom zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem.

Nakon postavljanja u željenu točku zahvata, svim čvorovima mreže konačnih elemenata smještenim na vanjskom rubu geometrijskog modela zupčanika s unutarnjim ozubljenjem blokiraju se svi translatorni pomaci u smjeru koordinatnih osi  $x$  i  $y$  (Slika 5.7, crveno).

Pomake geometrijskog modela zupčanika s vanjskim ozubljenjem potrebno je ograničiti u cilindričnom koordinatnom sustavu koji ima ishodište u točki  $O_1$  pa se svim čvorovima mreže konačnih elemenata smještenim na vanjskom rubu geometrijskog modela zupčanika s vanjskim ozubljenjem blokiraju svi pomaci u smjeru radialne osi  $r$  (Slika 5.7, plavo). Ograničenja pomaka nemaju utjecaja na rezultate numeričke analize metodom konačnih elemenata, budući da su ti čvorovi smješteni dovoljno daleko od područja na kojem se ostvaruje kontakt.



Slika 5.7 Rubni uvjeti

Vanjsko opterećenje uvodi se zakretanjem geometrijskog modela zupčanika s vanjskim ozubljenjem za neki određeni kut  $\theta$ , nakon čega se pokreće rješavač i pregleda se ispis sila u kontaktu za dotični slučaj. Vrijednost kuta zakretanja  $\theta$  iterativno je mijenjana sve dok nije postignuto odstupanje ukupne sile u kontaktu od  $\pm 1\%$  ukupne sile  $F_{bt}$  koja odgovara željenom opterećenju geometrijskog modela zupčanog para, nakon čega se vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika i na boku zuba zupčanika očitaju.

Prilikom određivanja naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika metodom konačnih elemenata svako područje zahvata (A-B, B-D, D-E, E-F i F-G) razdijeljeno je na deset jednakih intervala. Pri tome su, ovisno o točki zahvata, istovremeno obavljena mjerena za sva tri područja trostrukog zahvata (A-B, D-E i F-G) ili za oba područja dvostrukog zahvata (B-D i E-F).

Za svaki od dvadeset intervala kroz koje su rotirani geometrijski modeli zupčanika provedeno je posebno umrežavanje mreže konačnih elemenata te postavljanje kontaktnih elemenata. Time je osiguran pravilan raspored kontaktnih elemenata na mjestima dodira geometrijskih modela zupčanika i odgovarajuća gustoća mreže konačnih elemenata.

Postupak analize metodom konačnih elemenata objašnjen u ovom poglavlju upotrijebljen je za dobivanje numeričkih podataka u poglavljima 7 i 8.

## 6. Ispitivanje modela zupčanika metodom fotoelasticimetrije

Fotoelasticimetrija je eksperimentalna metoda analize naprezanja utemeljena na promjenjivosti optičkih svojstava određenih prozirnih tvari pod djelovanjem vanjskog opterećenja. Pruge interferencije (izokrome) na ispitivanom modelu mogu se uočiti optičkim uređajem - polariskopom te se na temelju njih određuje stanje naprezanja.

Izokroma je definirana kao svijetlo ili tamno područje na slici naprezanja za koje je razlika glavnih normalnih naprezanja  $\sigma_1 - \sigma_2$  konstantna i definirana izrazom [1]

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f_\sigma}{b} N_{iz}, \quad (6.1)$$

gdje je  $f_\sigma$  fotoelastična konstanta materijala modela,  $N_{iz}$  redni broj izokrome, a  $b$  debljina fotoelastičnog modela.

Vrijednost glavnog smičnog naprezanja u ravnini modela  $\tau_3$  može se odrediti putem izraza

$$\tau_3 = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|. \quad (6.2)$$

Razlika glavnih normalnih naprezanja  $\sigma_1 - \sigma_2$  jednaka je ekvivalentnom naprezanju  $\sigma_{ekv}$  prema teoriji najvećeg smičnog naprezanja [1],

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_{\text{ekv}}. \quad (6.3)$$

Korištenjem izraza (6.1) moguće je odrediti normalno naprezanje u korijenu zuba modela zupčanika  $\sigma_{F0}$  i naprezanje na boku zuba modela zupčanika  $\sigma_{H0}$ .

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika mjeri se u točki smještenoj na vanjskoj površini modela, na plohi koja nije u kontaktu s modelom drugog zupčanika. U tom slučaju glavno naprezanje  $\sigma_2$  koje je okomito na površinu modela bit će jednako nuli, nakon čega će se primjenom izraza (6.1) odrediti naprezanje u korijenu zuba zupčanika [1].

U slučaju kontakta bokova modela zupčanika, vrijednosti glavnih normalnih naprezanja  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  u izrazu (6.1) različite su od nule. Pojedinačne vrijednosti glavnih normalnih naprezanja  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  mogu se pojedinačno odrediti samo dodatnim postupcima fotoelasticimetrijskog ispitivanja [1], no vrijednost razlike glavnih normalnih naprezanja jednaka je vrijednosti ekvivalentnog naprezanja  $\sigma_{\text{ekv}}$  u promatranoj točki modela. Ta vrijednost jednaka je vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika  $\sigma_{H0}$ .

Za izvođenje fotoelastičnog eksperimenta potrebno je utvrditi optička i mehanička svojstva materijala modela, izraditi model i odgovarajući uređaj za opterećivanje, fotografirati sliku naprezanja u polariskopu te odrediti naprezanja u korijenu i na boku zuba fotoelastičnog modela zupčanika vizualnom analizom dobivene slike.

## 6.1 Materijal modela zupčanika za ispitivanje metodom fotoelasticimetrije

Modeli zupčanika i pripadajući probni štapovi za utvrđivanje modula elastičnosti  $E$  i fotoelastične konstante materijala modela  $f_\sigma$  izrađeni su iz ploče Araldita B (duromerna epoksidna plastična masa) debljine 10 mm. Optička osjetljivost tog fotoelastičnog materijala vrlo je velika [1], s redom izokroma od 38 po centimetru debljine modela. Zbog toga je Araldit B vrlo pogodan za precizna ispitivanja metodom fotoelasticimetrije i kod manjih naprezanja i deformacija.

Za ispitivanje metodom fotoelasticimetrije potrebno je poznavati fotoelastičnu konstantu materijala modela  $f_\sigma$ , modul elastičnosti materijala modela  $E$  te Poissonov broj materijala modela  $v$ .

Opterećeni Araldit B sklon je puzanju pa je vrijednosti fotoelastične konstante materijala modela  $f_\sigma$  i modula elastičnosti materijala modela  $E$  potrebno definirati u obliku funkcije vremena djelovanja opterećenja  $t_e$ , što je prikazano izrazima

$$f_\sigma = f_\sigma(t_e), \quad (6.4)$$

$$E = E(t_e). \quad (6.5)$$

Fotoelastična konstanta i modul elastičnosti materijala modela zupčanika određeni su korištenjem postupka opisanog u [1], [12] te primjenjenog u [35].

Navedenim postupkom dobiven je izraz za određivanje vrijednosti fotoelastične konstante materijala modela  $f_\sigma$ ,

$$f_\sigma = 10,971 \cdot t_e^{-0,014} \quad (6.6)$$

te izraz za određivanje modula elastičnosti materijala modela  $E$ ,

$$E = 3145,9 \cdot t_e^{-0,006}. \quad (6.7)$$

Vrijednost Poissonovog broja  $\nu$  materijala modela iznosi 0,38 [1].

Zbog izloženosti materijala na rubovima vlazi ili lokalnom zagrijavanju prilikom izrade modela dolazi do pojave rubnog efekta i promjene svojstava materijala modela na vanjskim plohamama modela zupčanika [61], [63]. Zbog toga su modeli zupčanika odmah nakon izrade zaštićeni plastičnom folijom, a lokalno zagrijavanje na vanjskim plohamama modela izbjegnuto je korištenjem novih glodala malog promjera pri velikoj brzini vrtnje [1], [12], [61], [63].

Kod VPP ozubljenja u zahvatu je istovremeno više parova zuba pa svako odstupanje zuba modela zupčanika od teoretski točnog profila utječe na ispravnost zahvata [18], [19], a time i na rezultate ispitivanja. Zbog toga je odgovarajuća točnost izrade ozubljenja osigurana izradom modela zupčanika na numerički upravljanju glodalici.

Kao i kod izrade modela zupčanika za numeričku analizu metodom konačnih elemenata, profili prijelazne krivulje korijena i boka zuba geometrijskih modela zupčanika izrađeni su pomoću računalnih programa VPP\_profil [35] i GearPac CX 3.5 [45].

Dobivenim profilima ozubljenja pridodane su konture tijela modela, nakon čega je dvodimenzionalni model ekstrudiran u trodimenzionalni te iskorišten za automatsko generiranje računalnog koda za upravljanje radom glodalice.

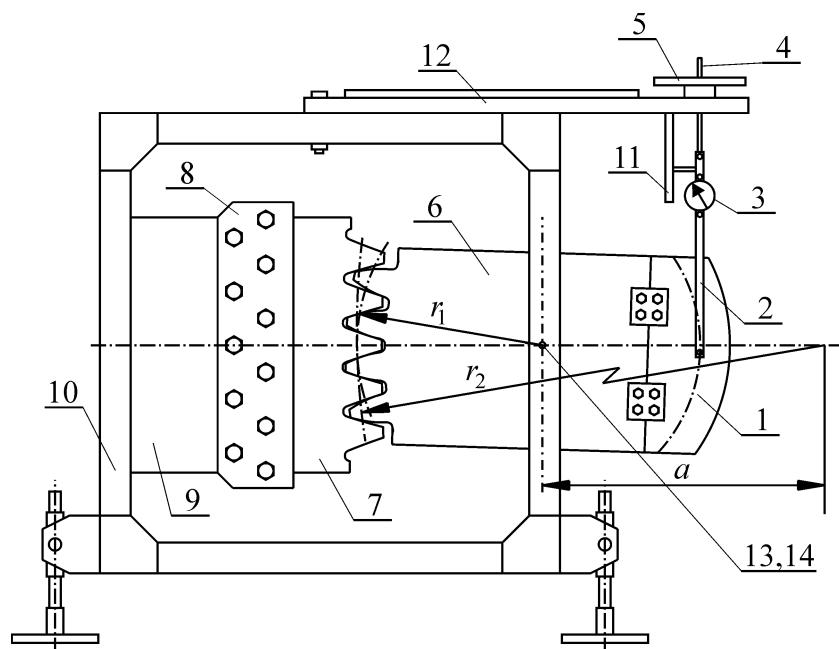
## 6.2 Oprema za ispitivanje metodom fotoelasticimetrije

Za opterećivanje i snimanje modela upotrijebljena je naprava prikazana na slici 6.1.

Opterećenje se uvodi preko polukružnog segmenta (1) koji je učvršćen za produžetak modela malog zupčanika (6). Model malog zupčanika uležišten je kugličnim ležajem (14) koji je smješten na osovinici s ekscentrom (13) pričvršćenoj za okvir naprave (10). Zakretanjem osovine s ekscentrom moguće je fino podešavanje razmaka osi i zračnosti zupčanog para.

Model velikog zupčanika (7) izveden je u obliku segmenta te se postavlja u željenu točku zahvata pomicanjem po kružnoj kliznoj stazi koja se nalazi na nosaču (9). Stezne ploče (8) onemogućuju pomicanje modela velikog zupčanika.

Potrebna sila opterećenja postiže se putem navojnog vretena (4), kola za pritezanje (5) i vodilice (11), smještenih na pomičnoj gredi (12). Postignuta sila opterećenja modela očitava se na prstenastom dinamometru (3).



Slika 6.1 Naprava za opterećivanje fotoelastičnog modela

Sila kojom je model opterećen prilikom fotoelastičnog ispitivanja izmjerena je prstenastim dinamometrom Tiedemann J464 s mjernim područjem do 1980 N.

Opterećeni model promatran je pomoću difuznog polariskopa Tiedemann AE 131 uz monokromatsko svjetlo valne duljine  $\lambda = 589$  nm, dobiveno pomoću dvije niskotlačne natrijeve svjetiljke snage 40 W. Polarizacijski filteri i četvrтvalne ploče polariskopa su promjera 300 mm.

Fotografije opterećenog modela snimljene su digitalnim fotografskim aparatom Panasonic DMC-FZ7. Prilikom snimanja, aparat je postavljen na fotografski tronožac i poravnat s optičkom osi polariskopa na udaljenosti 2 m od modela. Digitalni fotografski aparat optički je istovrijedan klasičnom 35 mm fotografskom aparatu s objektivom žarišne duljine 432 mm. Digitalne fotografije snimljene su u rezoluciji od 6 megapiksela bez naknadnog digitalnog uvećanja i zapisane u obliku TIFF datoteka. TIFF format izabran je zbog razlučivosti veće od one koju je moguće postići klasičnom fotografijom [23], [58]. Digitalne fotografije analizirane su pomoću programskog paketa CorelDRAW Graphics Suite X6.

Navedeni postupak i oprema upotrijebljeni su prilikom ispitivanja modela metodom fotoelasticimetrije. Rezultati tog ispitivanja upotrijebljeni su za verifikaciju rezultata analize metodom konačnih elemenata i detaljno su prikazani u poglavljju 7.

# **7. Verifikacija predloženog postupka numeričke analize (MKE) metodom fotoelasticimetrije**

## **7.1 Parametri geometrije modela zupčanika za ispitivanje metodom fotoelasticimetrije**

Vrijednosti naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika potrebne za verifikaciju rezultata numeričke analize metodom konačnih elemenata dobivene su ispitivanjem metodom fotoelasticimetrije.

Ispitivanje metodom fotoelasticimetrije provedeno je na zupčanom paru s unutarnjim ozubljenjem i ravnim zubima. Vrijednosti parametara geometrije modela zupčanika navedene su u tablici 7.1.

Tablica 7.1 Parametri geometrije zupčanog para za fotoelastično ispitivanje

Parametar	Vrijednost
$z_{1,2}$	22/-88
$m$	22 mm
$\alpha$	20°
$a$	-726 mm
$x_1 = x_2$	0
$h_{a0}^*$	1,5
$d_{1,2}$	484/-1936 mm
$d_{a1,2}$	545,6/-1886,3 mm
$\varepsilon_a$	2,306
$\rho_{a0}^*_{1,2}$	0,341/0,259
$c^*_{1,2}$	0,370/0,100

## 7.2 Fotoelastično ispitivanje modela zupčanika

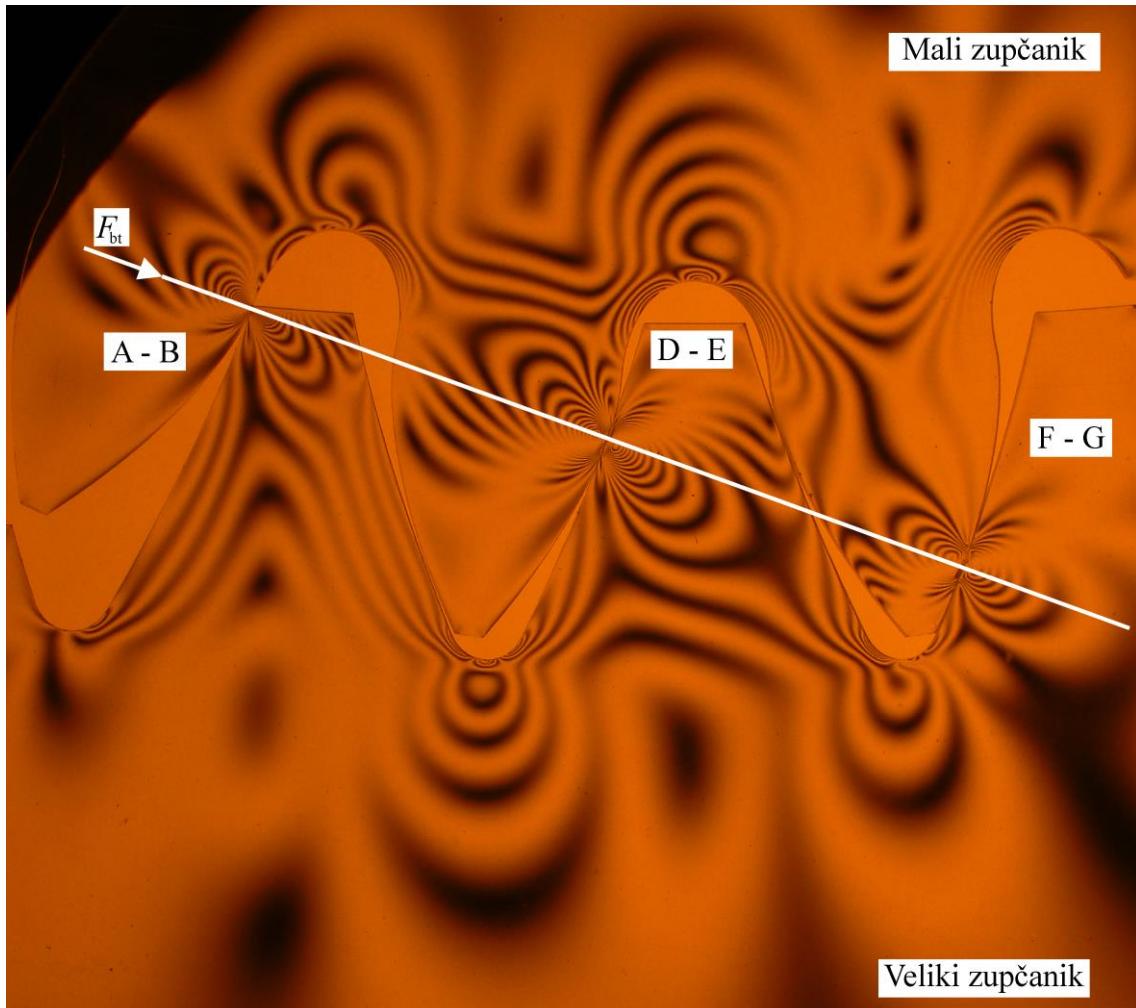
Prilikom snimanja opterećenog modela zupčanog para upotrijebljena je naprava za opterećivanje te optička i fotografска oprema navedena u poglavlju 6.

U području trostrukog zahvata istovremeno su prikupljeni podaci za područja A – B, D – E i F – G, dok su u području dvostrukog zahvata istovremeno prikupljeni podaci za područja B – D i E – F.

Prilikom ispitivanja modeli su bili opterećeni silom na temeljnog krugu  $F_{bt} = 1920$  N. Snimanje modela u pojedinom položaju završeno je za 20 sekundi kako bi se izbjegao utjecaj puzanja materijala.

Relaksacija materijala između snimanja postignuta je stankom od 5 minuta. Na fotografijama su prikazane neke karakteristične točke zahvata: početak trostrukog zahvata A – D – F (Slika 7.1), unutrašnjost trostrukog zahvata (Slika 7.2), završetak trostrukog zahvata (Slika 7.3), početak dvostrukog zahvata B – E (Slika 7.4), unutrašnjost dvostrukog zahvata (Slika 7.5) i završetak dvostrukog zahvata (Slika 7.6).

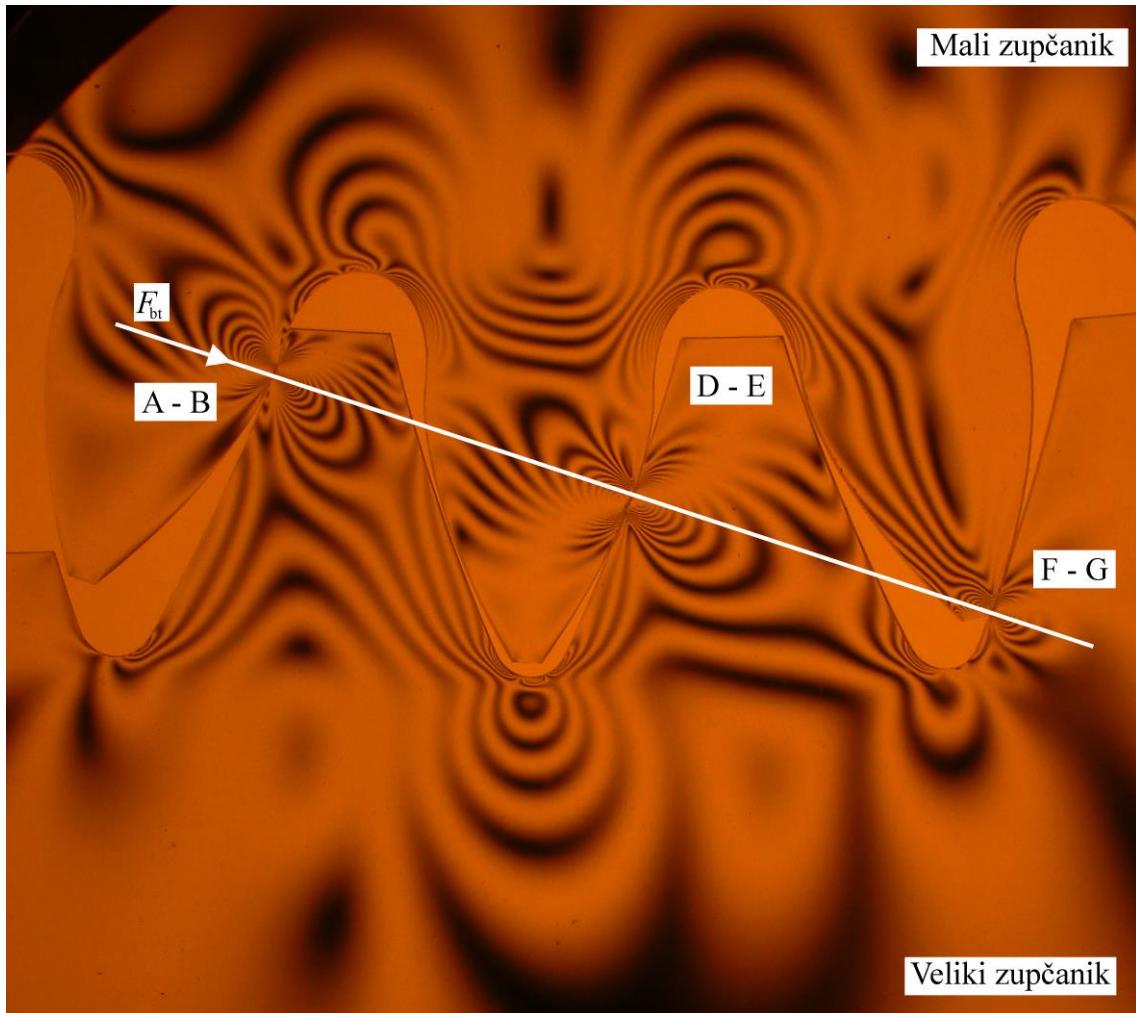
Na slikama je označen smjer djelovanja opterećenja te pojedini zupčanici i točke zahvata. Ispravnost zahvata provjerena je provlačenjem pravca kroz točke zahvata.



Slika 7.1 Početak trostrukog zahvata: A – B ( $g/p_{et} = 0$ ), D – E ( $g/p_{et} = 1$ ), F – G ( $g/p_{et} = 2$ ).  
Materijal: Araldit B,  $F_{bt} = 1920 \text{ N}$ ,  $\varepsilon_a = 2,306$ .

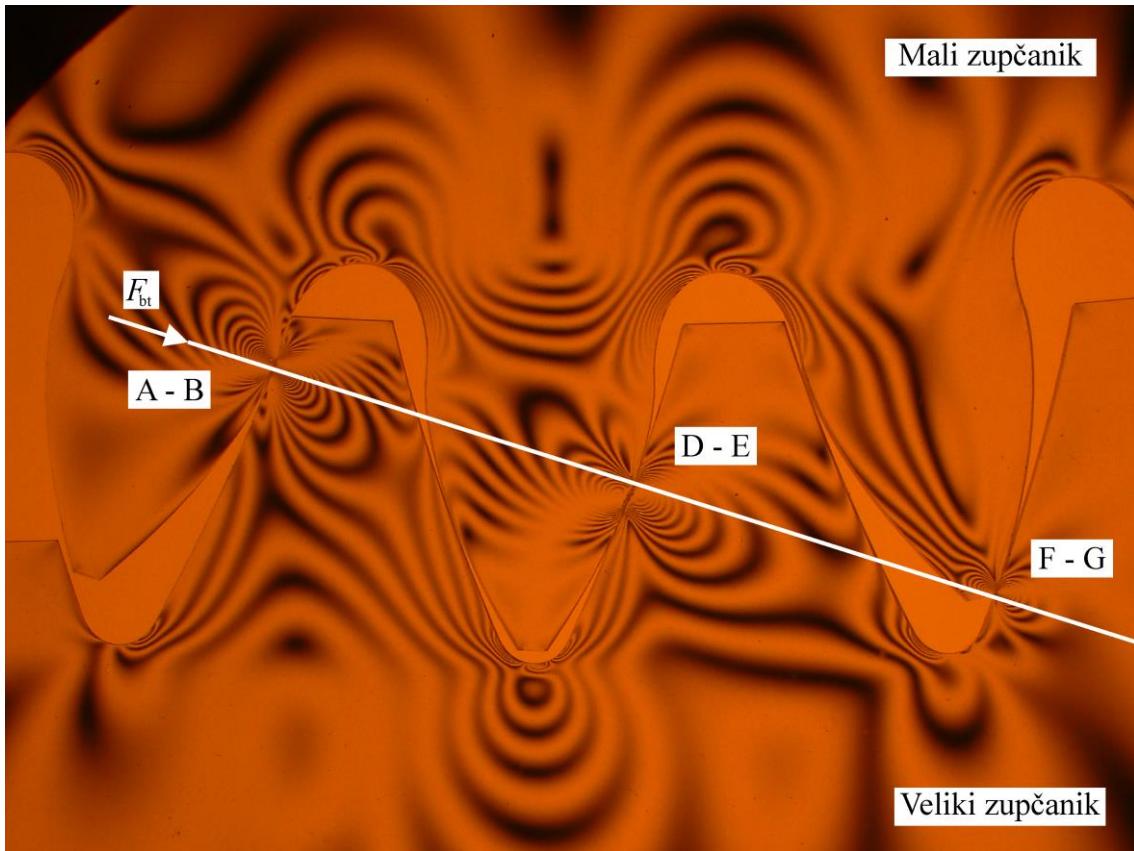
Vizualnom analizom slika utvrđeno je da se modeli zupčanika dodiruju u tri točke u područjima trostrukog zahvata te u dvije točke u područjima dvostrukog zahvata, čime je dokazana ispravnost modela (Slike 7.1 – 7.6). Potvrđena je točnost koordinata boka zuba dobivenih putem računalnih programa GearPac CX 3.5 [45] i VPP\_Profil [35] te točnost izrade modela na CNC glodalici.

Prema podacima dostupnim tijekom izrade ovog rada, fotoelastična ispitivanja obavljana su u slučajevima jednostrukog [74], [25] te dvostrukog [55], [46] zahvata zupčanika. Trostruki zahvat prvi je puta prikazan u [35], dok ovaj rad predstavlja prvu objavljenu fotoelastičnu analizu zahvata unutarnjeg VPP ozubljenja.



Slika 7.2 Unutrašnjost trostrukog zahvata: A – B ( $g/p_{et} = 0,153$ ), D – E ( $g/p_{et} = 1,153$ ), F – G ( $g/p_{et} = 2,153$ ). Materijal: Araldit B,  $F_{bt} = 1920$  N,  $\varepsilon_a = 2,306$ .

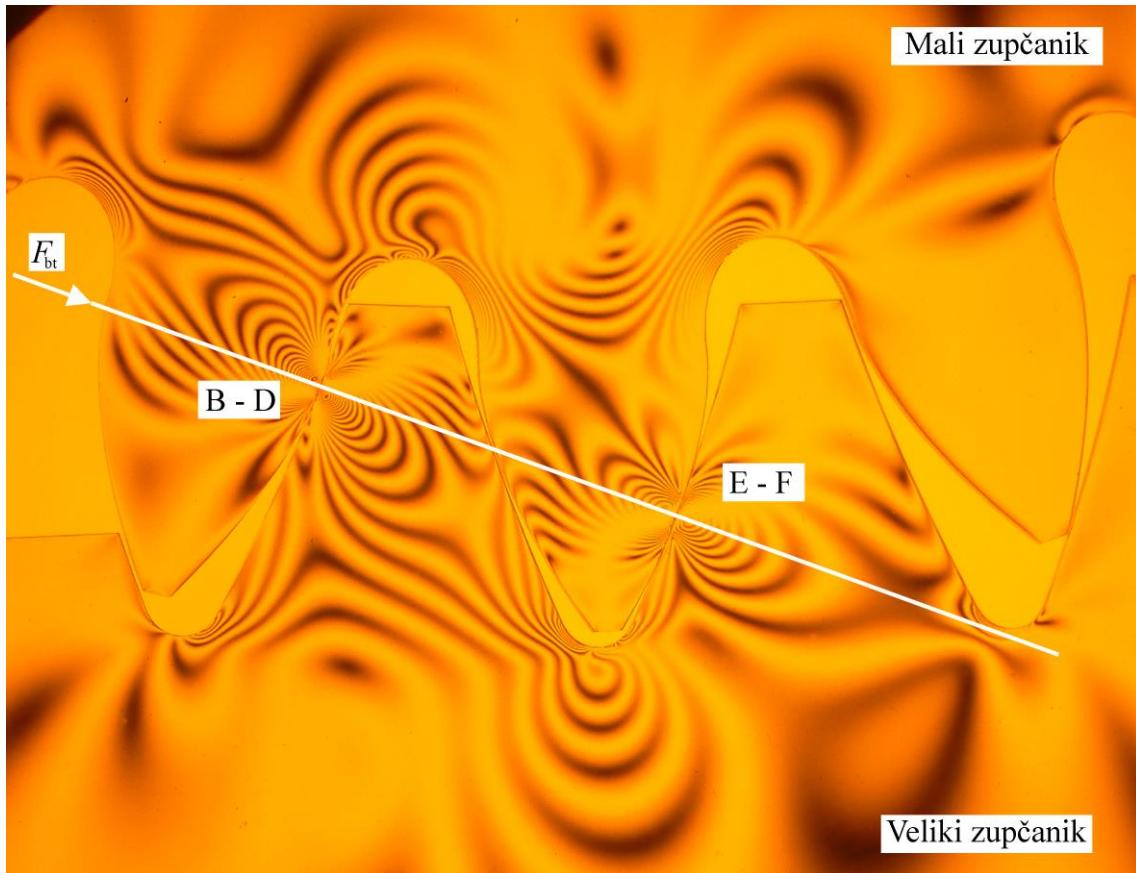
Potrebno je također naglasiti da je u ovom radu zupčanik s unutarnjim ozubljenjem snimljen u zahvatu sa zupčanicom s vanjskim ozubljenjem, za razliku od radova [49], [48], [52], [51] i [59] u kojima je zahvat zupčanika s unutarnjim i vanjskim ozubljenjem simuliran metalnim šiljkom naslonjenim na bok zuba. Točnost mjerjenja u [59] dodatno je umanjena korištenjem modela koji se sastoji od samo jednog zuba zupčanika. U radu [25] upotrijebljen je model zupčanika s unutarnjim ozubljenjem, dok je zahvat simuliran putem valjka izrađenog od materijala modela postavljenog na željenu točku na boku zupčanika. Takvim postupkom postignuta je veća točnost nego kod radova [49], [48], [52], [51] i [59], no vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika nisu potpuno točne, budući da je kontakt u svim točkama zahvata uspostavljen korištenjem valjka jednakog promjera.



Slika 7.3 Završetak trostrukog zahvata: A – B ( $g/p_{et} = 0,306$ ), D – E ( $g/p_{et} = 1,306$ ), F – G ( $g/p_{et} = 2,306$ ). Materijal: Araldit B,  $F_{bt} = 1920$  N,  $\varepsilon_a = 2,306$ .

Na slikama nema značajnijih smetnji koje bi umanjivale jasnoću izokroma. Na slikama se ne pojavljuje spektar boja karakterističan za snimke snimljene uz prisutnost bijele svjetlosti, što znači da je snimanje ispravno izvršeno. Rubni efekt nije vidljiv na slikama, što je rezultat visoke kvalitete izrade modela te zaštite modela od štetnog djelovanja vlage.

Na nekim točkama dodira zuba postoje mala odstupanja mesta zahvata od ucrtane teoretske zahvatne crte, što se može objasniti elastičnošću naprave za opterećivanje te elastičnom deformacijom modela u blizini točaka dodira [34], [35], [36], [38]. Klizanje u tijeku zahvata bokova mnogo je izraženije kod VPP zupčanika nego kod običnih zupčanika, a najviše je izraženo na početku i kraju zahvata, dok je najmanje u neposrednoj blizini kinematskog pola C.



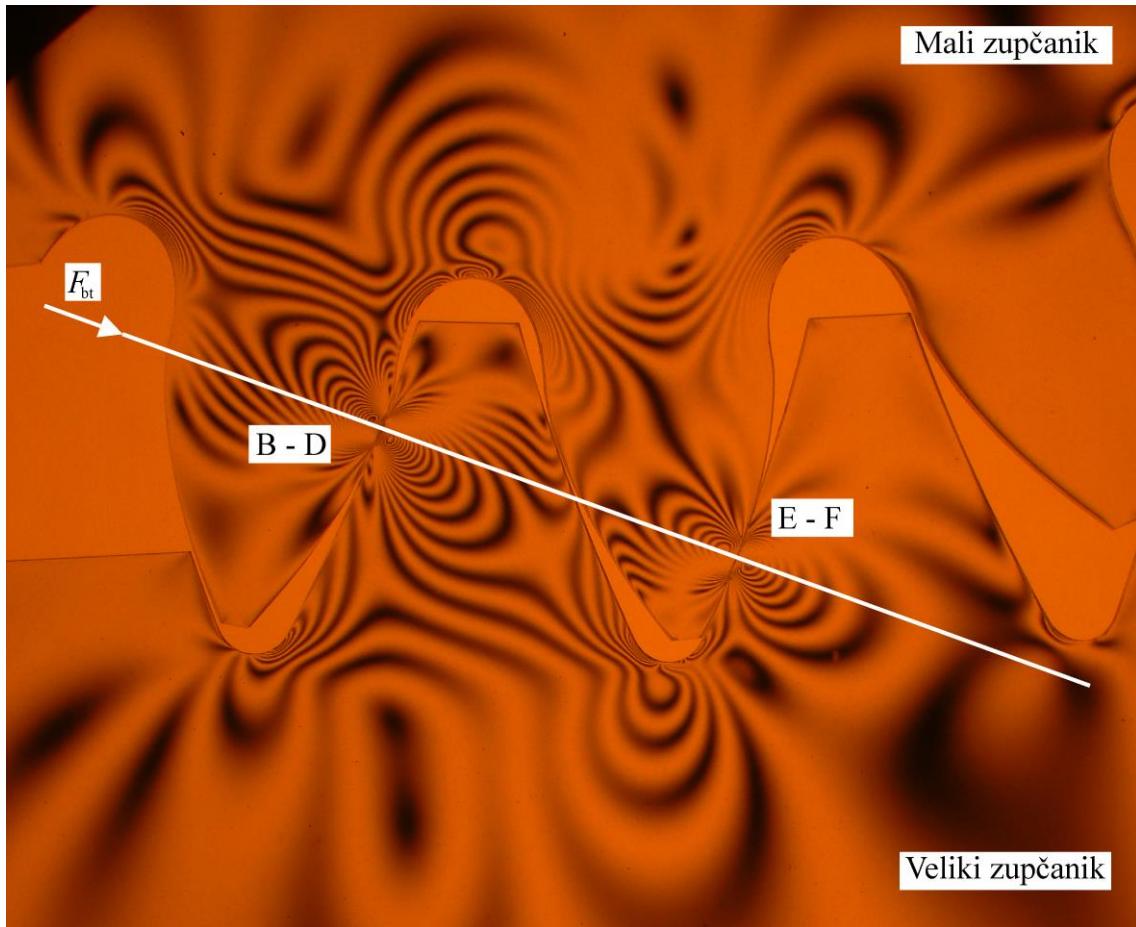
Slika 7.4 Početak dvostrukog zahvata: B – D ( $g/p_{et} = 0,306$ ), E – F ( $g/p_{et} = 1,306$ ).

Materijal: Araldit B,  $F_{bt} = 1920$  N,  $\varepsilon_a = 2,306$ .

Zbog toga se na mjestu dodira osim normalne sile javlja i sila trenja. Zbog djelovanja sile trenja u neposrednom području dodira dolazi do deformacije modela, što može utjecati na sliku naprezanja. Zbog toga se model opterećuje postupno.

Poseban problem predstavlja optičko razdvajanje obrisa modela. Gledano iz položaja fotografskog aparata, obrisi modela su osvjetljeni okomito isključivo u području optičke osi objektiva, gdje će se obrisi prednje i zadnje ravnine modela preklopiti. Na većim radikalnim udaljenostima od optičke osi objektiva svjetlo više ne prolazi okomito kroz model, pa dolazi do razdvajanja obrisa modela, pri čemu se stražnja linija modela vidi kao tanka tamna ili svijetla pruga koja nalikuje na izokromu.

Razlike u osvjetljenosti pojedinih slika mogu se objasniti radom sustava automatske ekspozicije fotografskog aparata.

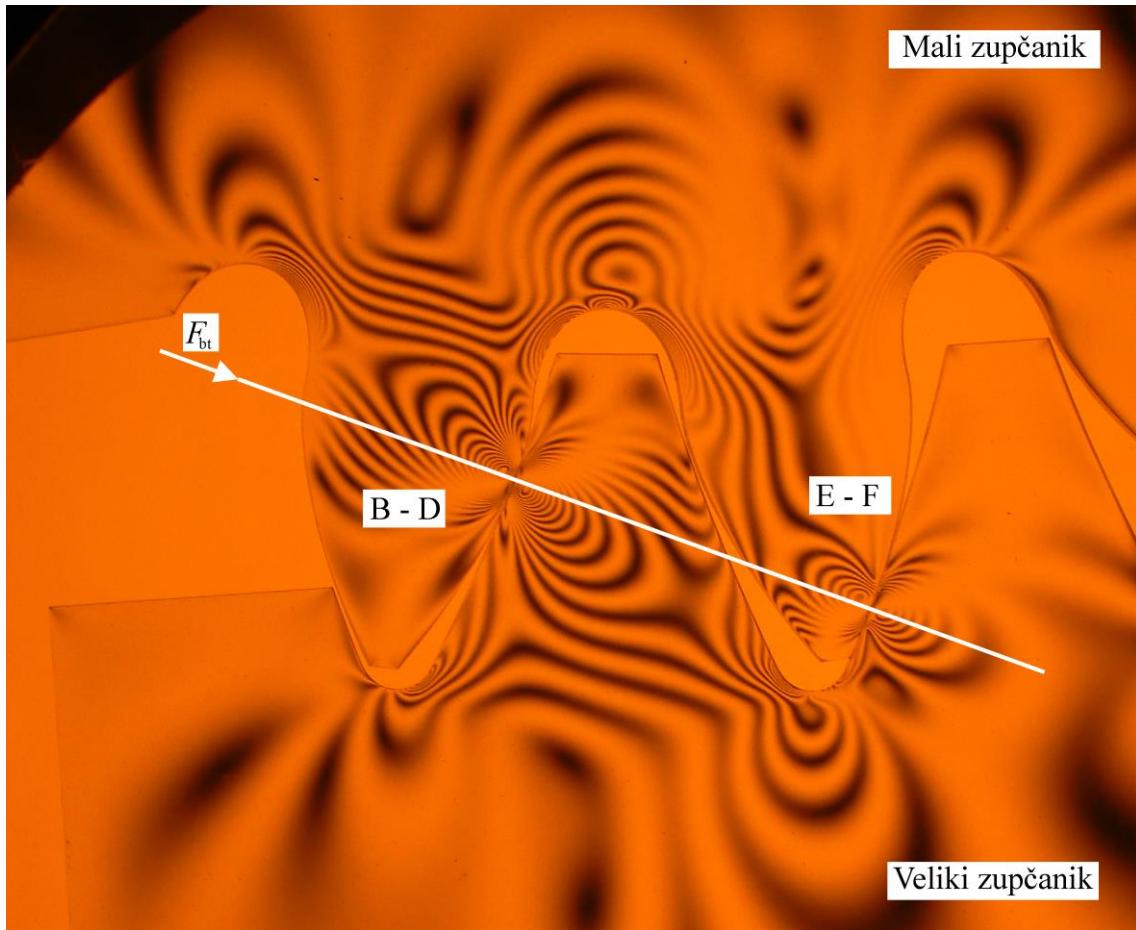


Slika 7.5 Unutrašnjost dvostrukog zahvata: B – D ( $g/p_{et} = 0,653$ ), E – F ( $g/p_{et} = 1,653$ ).

Materijal: Araldit B,  $F_{bt} = 1920$  N,  $\varepsilon_a = 2,306$ .

Nisu primijećene razlike u osvijetljenosti pojedinih dijelova slike, dok postoje manje razlike u vidljivosti izokroma. Te razlike u vidljivosti na vanjskim rubovima slike mogu se objasniti pojavom sferne aberacije (optička pogreška kod koje se zrake svjetlosti koje prolaze izvan središta leće sijeku ispred ili iza žarišta leće). Zbog te pojave leće objektiva fotografskog aparata nisu u mogućnosti u potpunosti izoštiti sliku, pa prema vanjskim rubovima slike dolazi do blagog zamućenja koje nije posebno uočljivo kod svakodnevne fotografije. Pojava je karakteristična za sve fotografске aparate, a umanjuje se ili izbjegava posebnom konstrukcijom ili kombinacijom leća. Prilikom fotografiranja detalja, nešto je izraženija kod digitalnih fotografskih aparata zbog kraćih objektiva manjeg promjera u odnosu na klasične fotografске aparate.

Nijedna od navedenih pojava nije značajno utjecala na očitanje fotografija u ovom radu.



Slika 7.6 Završetak dvostrukog zahvata: B – D ( $g/p_{et} = 0,653$ ), E – F ( $g/p_{et} = 1,653$ ).

Materijal: Araldit B,  $F_{bt} = 1920$  N,  $\varepsilon_a = 2,306$ .

### 7.3 Uspoređivanje rezultata fotoelastičnog ispitivanja s rezultatima metode konačnih elemenata

Materijalni parametri fotoelastičnog materijala Araldit B korišteni prilikom ispitivanja metodom fotoelastičnosti i metodom konačnih elemenata navedeni su u tablici 7.2.

Tablica 7.2 Materijalni parametri za Araldit B

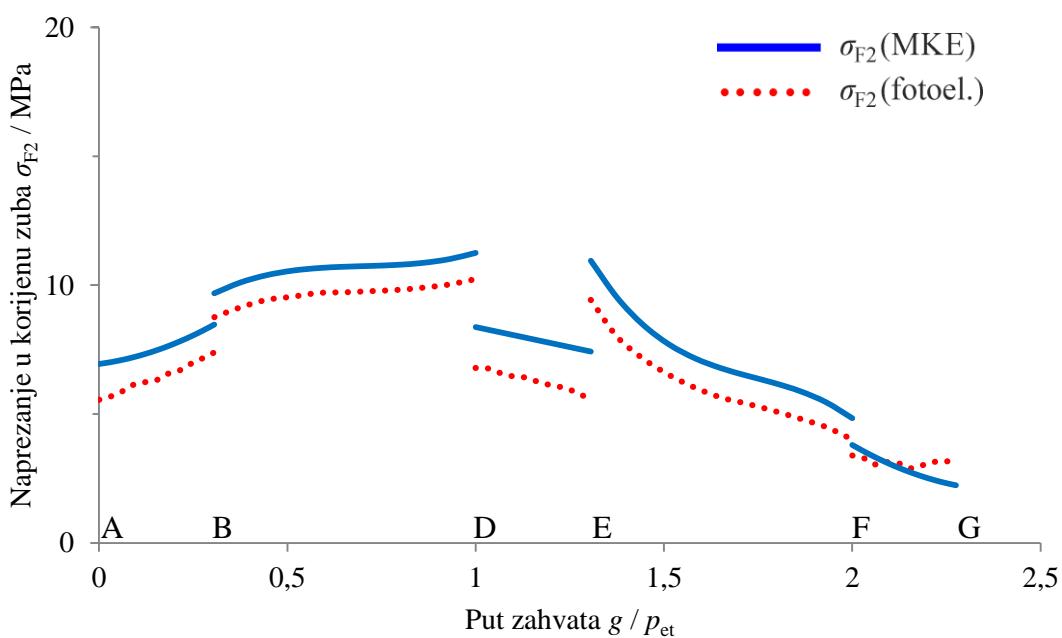
$f_\sigma$	10,25 Nmm <sup>-1</sup>
$E$	3060 MPa
$v$	0,38

Vrijednosti fotoelastične konstante  $f_\sigma$  i modula elastičnosti  $E$  izračunate su na temelju izraza (6.5) i (6.6). Vrijednost Poissonovog koeficijenta  $\nu$  usvojena je na temelju literature [1], [61], [63].

Prilikom ispitivanja metodom fotoelasticimetrije i prilikom numeričke analize metodom konačnih elemenata (MKE) upotrijebljeni su modeli jednake geometrije.

Vrijednosti naprezanja u korijenu i na boku zuba fotoelastičnog modela zupčanika dobivene očitanjem broja izokroma prikazane su zajedno sa vrijednostima naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika dobivenim putem metode konačnih elemenata. Vrijednosti naprezanja dobivene metodom konačnih elemenata izračunate su prema teoriji najveće distorzisne energije.

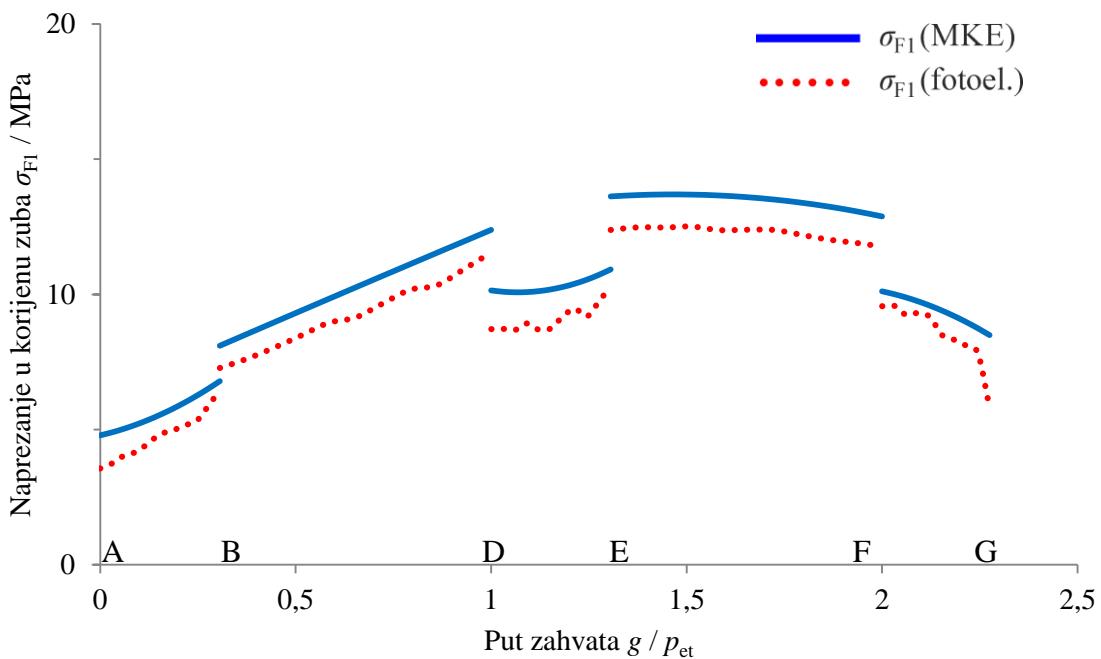
Rezultati dobiveni fotoelastičnim ispitivanjem dobro se slažu s rezultatima dobivenim putem metode konačnih elemenata (Slika 7.7).



Slika 7.7 Naprezanje u korijenu zuba fotoelastičnog modela zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. Materijal: Araldit B,  $F_{bt} = 1920 \text{ N}$ ,  $\varepsilon_a = 2,306$ .

Naprezanje raste u području prvog trostrukog zahvata od točke A prema točki B te postiže maksimum u području prvog dvostrukog zahvata B – D. U području drugog trostrukog zahvata naprezanje opada prema točki E, uz očekivani nagli rast na početku drugog dvostrukog zahvata E – F. Naprezanje konačno pada prema točki G u području trećeg trostrukog zahvata F – G. U završnom dijelu zahvata između točaka F i G postoje manja

odstupanja. Ta odstupanja nisu važna budući da je u tom dijelu zahvata naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem najniže. Raspodjela naprezanja u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem (Slika 7.8) bitno je drukčija nego kod zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. Naprezanje u korijenu zuba modela zupčanika s vanjskim ozubljenjem raste te se najveće naprezanje pojavljuje u dijelu trećeg trostrukog zahvata E – F, što je u skladu s rezultatima ispitivanja provedenog u [35].



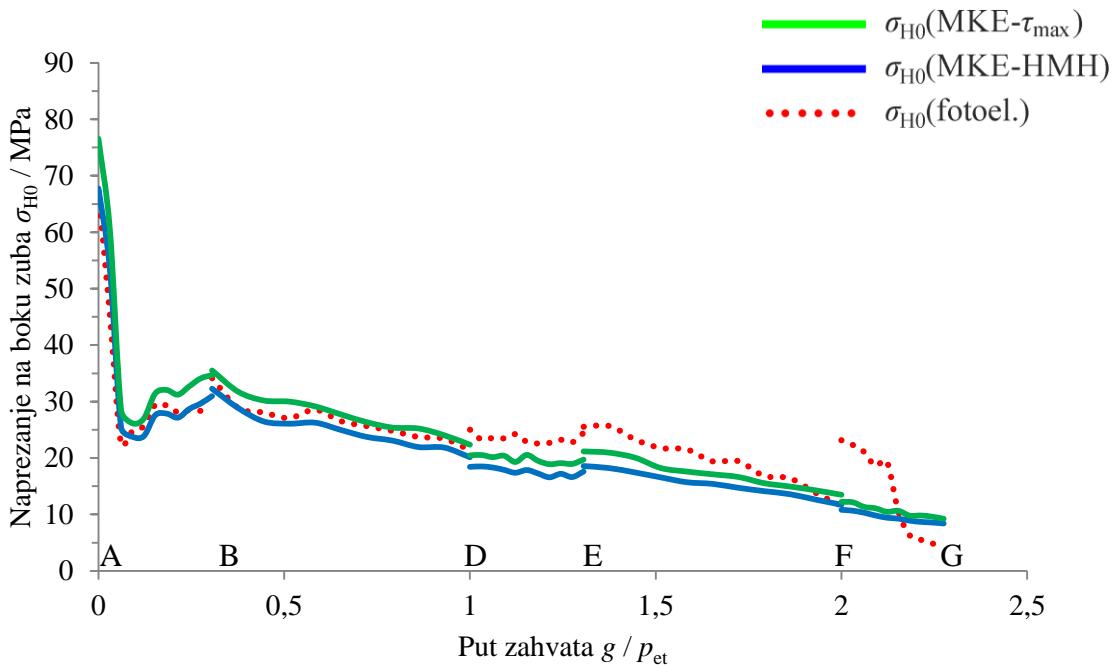
Slika 7.8 Naprezanje u korijenu zuba fotoelastičnog modela zupčanika s vanjskim ozubljenjem. Materijal: Araldit B,  $F_{bt} = 1920 \text{ N}$ ,  $\varepsilon_a = 2,306$ .

Prilikom ispitivanja metodom fotoelasticimetrije očitano je i naprezanje na boku zuba. Time je omogućena kvalitativna usporedba rezultata s rezultatima iz [35] te provjera ispravnosti mjerjenja (Slika 7.9).

Analizom podataka (Slika 7.9) utvrđeno je da na početku prvog trostrukog zahvata postoji vrlo veliko naprezanje na boku zuba modela zupčanika nakon kojeg slijedi nagli pad kroz prvi trostruki zahvat A - B, što se može objasniti dodirom vrlo uske površine zuba s unutarnjim ozubljenjem (oštri rub glave zuba) sa bokom zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem. Naprezanje se zatim ponovno povećava prema točki B, nakon čega nastavlja padati kroz zahvat prema točki G. Nepravilnosti u području F - G mogu se objasniti manjom deformacijom površina u dodiru, trenjem između modela zupčanika u zahvatu, kao i vrlo uskom dodirnom površinom glave zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. Kod proračuna

metodom konačnih elemenata, naprezanje na boku zuba zupčanika određeno je prema teoriji najveće distorziske energije (MKE-HMH) te prema teoriji najvećeg smičnog naprezanja (MKE- $\tau_{\max}$ ).

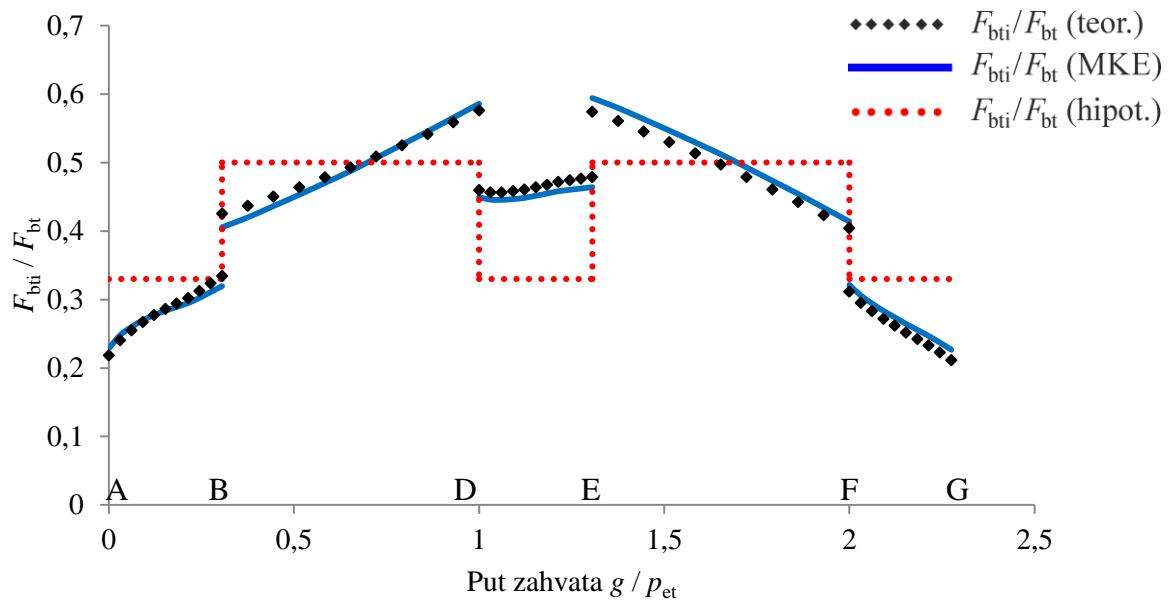
Zaključuje se da se vrijednosti dobivene metodom konačnih elemenata prema ovim teorijama čvrstoće dobro poklapaju s vrijednostima dobivenim fotoelastičnim ispitivanjem.



Slika 7.9 Naprezanje na boku zuba fotoelastičnog modela zupčanika. Materijal: Araldit B,  $F_{bt} = 1920 \text{ N}$ ,  $\varepsilon_a = 2,306$ .

Raspodjela sile u tijeku zahvata prikazana je na temelju rezultata dobivenih prilikom analize metodom konačnih elemenata (Slika 7.10). Između raspodjele sile tijekom zahvata dobivene analizom putem metode konačnih elemenata i hipotetske raspodjele sile tijekom zahvata postoje razlike, što je u skladu s očekivanjima [35], [66], [73]. Teoretska raspodjela sile, dobivena korištenjem izraza prema radu [51] te izraza iz poglavlja 4.3 i 4.4 ovog rada, dobro se poklapa s vrijednostima dobivenim putem metode konačnih elemenata, što je u skladu s rezultatima prethodnog istraživanja [35].

Najveća vrijednost sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  nalazi se u području dvostrukog zahvata, što je i očekivano. Kod ovog zupčanog para ta najveća vrijednost sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  nalazi se u području drugog dvostrukog zahvata zupčanika s unutarnjim ozubljenjem E – F, što odgovara području prvog dvostrukog zahvata B – D zupčanika s vanjskim ozubljenjem.



Slika 7.10 Raspodjela sile u zahvatu zuba fotoelastičnog modela zupčanog para s vanjskim ozubljenjem. Materijal: Araldit B,  $F_{bt} = 1920 \text{ N}$ ,  $\varepsilon_u = 2,306$ .

Na temelju iznesenoga zaključeno je da se vrijednosti naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika dobivene ispitivanjem metodom fotoelasticimetrije dovoljno dobro slažu s vrijednostima dobivenim putem metode konačnih elemenata te da se metoda konačnih elemenata može koristiti u daljnoj analizi.

Metoda konačnih elemenata upotrijebljena je u daljnoj analizi u poglavlju 8 za dobivanje referentnih vrijednosti naprezanja u korijenu i na boku zuba UVPP ozubljenja i raspodjele sile u zahvatu zupčanika.

Te vrijednosti upotrijebljene su za provjeru vrijednosti naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem dobivenih primjenom proračuna predloženog u četvrtom poglavlju ovog rada.

## 8. Analiza promjene naprezanja tijekom zahvata zupčanih parova

U ovom poglavlju prikazani su rezultati analize promjene naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika UVPP zupčanog para tijekom zahvata. Rezultati analize naprezanja u korijenu i na boku zuba VPP zupčanika s unutarnjim ozubljenjem uspoređeni su s rezultatima dobivenim metodom proračuna koja je predstavljena u četvrtom poglavlju ovog rada. Naprezanje u korijenu i na boku zuba VPP zupčanika s vanjskim ozubljenjem detaljno je istraženo u radu [35] i ovdje se neće dalje razmatrati.

### 8.1 Zupčani parovi za analizu metodom konačnih elemenata

Za potrebe ispitivanja pripremljeno je 11 parova zupčanika s vanjsko-unutarnjim ozubljenjem. Parametri geometrije tih zupčanih parova prikazani su u tablicama 8.1 - 8.3. Pretpostavljeno je da su modeli zupčanih parova za analizu metodom konačnih elemenata opterećeni okretnim momentom  $T$ , zbog kojeg se javlja ukupna sila na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ . Tako dobivena vrijednost sile  $F_{bt}$  u svim slučajevima zaokružena je na najbližih 100 N. Smatra se da je računalni model zupčanog para opterećen željenom silom  $F_{bt}$  ukoliko je postignut ukupni iznos sile na zahvatnoj crti unutar 99...101 %  $F_{bt}$ .

Tablica 8.1 Parametri geometrije zupčanih parova 0 - 3 za analizu metodom konačnih elemenata

Parametar	Par 0	Par 1	Par 2	Par 3
$z_{1,2}$	22/-88	40/-200	50/-350	50/-350
$m$	22 mm	12 mm	12 mm	12 mm
$\alpha$	20°	17°	20°	22°
$a$	-726 mm	-960 mm	-1800 mm	-1800 mm
$x_1 = x_2$	0	0	0	0
$h_{a0}^*_{1,2}$	1,5/1,5	1,8/1,8	1,5/1,5	1,5/1,5
$d_{1,2}$	484/-1936 mm	480/-2400 mm	600/-4200 mm	600/-4200 mm
$d_{a1,2}$	545,6/-1886,3 mm	504/-2376 mm	631,2/-4168,8 mm	631,2/-4168,8 mm
$d_{b1,2}$	454,81/-1819,25 mm	459,03/-2295,13 mm	563,82/-3946,71 mm	556,31/-3894,17 mm
$\varepsilon_a$	2,306	2,148	2,435	2,271
$\rho_{a0}^*_{1,2}$	0,341/0,259	0,150/0,150	0,200/0,200	0,200/0,200
$c^*_{1,2}$	0,370/0,100	0,100/0,100	0,200/0,200	0,200/0,200
$T_1$	1000 Nm	1000 Nm	1000 Nm	1000 Nm
$T_2$	2000 Nm	2000 Nm	2000 Nm	2000 Nm
$T_3$	4000 Nm	4000 Nm	4000 Nm	4000 Nm
$T_4$	6000 Nm	6000 Nm	6000 Nm	6000 Nm
$F_{bt1}$	4400 N	4400 N	3600 N	3600 N
$F_{bt2}$	8800 N	8700 N	7100 N	7200 N
$F_{bt3}$	17600 N	17500 N	14200 N	14400 N
$F_{bt4}$	26500 N	26200 N	21300 N	21600 N

Tablica 8.2 Parametri geometrije zupčanih parova 4 - 7 za analizu metodom konačnih elemenata

Parametar	Par 4	Par 5	Par 6	Par 7
$z_{1,2}$	50/-350	50/-350	40/-200	40/-600
$m$	12 mm	12 mm	4 mm	4 mm
$\alpha$	14°	18°	20°	14°
$a$	-1800 mm	-1800 mm	-320 mm	-1120 mm
$x_1 = x_2$	0	0	0	0
$h_{a0}^*_{1,2}$	1,4/1,4	1,25/1,25	1,4/1,4	1,6/1,0
$d_{1,2}$	600/-4200 mm	600/-4200 mm	160/-800 mm	160/-2400 mm

Tablica 8.2 Parametri geometrije zupčanih parova 4 - 7 za analizu metodom konačnih elemenata (nastavak)

Parametar	Par 4	Par 5	Par 6	Par 7
$d_{a1,2}$	624/-4176 mm	624/-4176 mm	170/-790 mm	173/2392 mm
$d_{b1,2}$	582,18/-4075,24 mm	570,63/-3994,44 mm	150,35/-751,75 mm	155,25/-2328,71 mm
$\varepsilon_a$	2,511	2,05	2,254	2,919
$\rho_{a0}^*{}_{1,2}$	0,39/0,39	0,25/0,25	0,200/0,200	0,200/0,200
$c^*{}_{1,2}$	0,400/0,400	0,250/0,250	0,200/0,200	0,200/0,250
$T_1$	1000 Nm	1000 Nm	250 Nm	250 Nm
$T_2$	2000 Nm	2000 Nm	500 Nm	500 Nm
$T_3$	4000 Nm	4000 Nm	1000 Nm	1000 Nm
$T_4$	6000 Nm	6000 Nm	1500 Nm	1500 Nm
$F_{bt1}$	3500 N	3500 N	3300 N	3200 N
$F_{bt2}$	6900 N	7000 N	6700 N	6500 N
$F_{bt3}$	13800 N	14000 N	13300 N	12900 N
$F_{bt4}$	20600 N	21000 N	20000 N	19300 N

Tablica 8.3 Parametri geometrije zupčanih parova 8 - 10 za analizu metodom konačnih elemenata

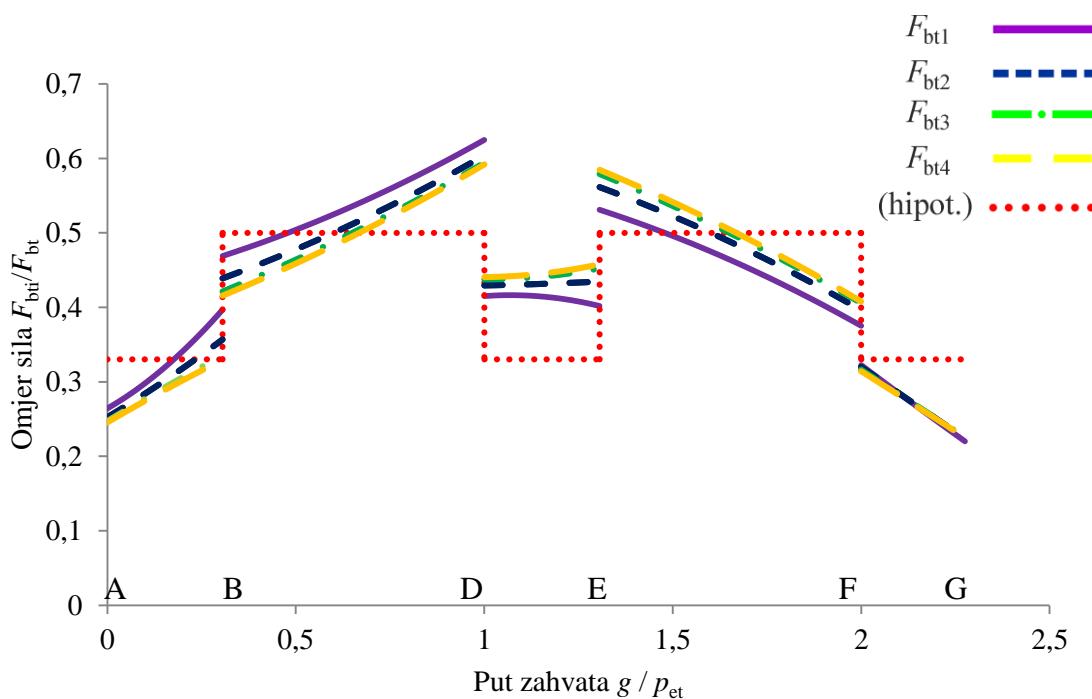
Parametar	Par 8	Par 9	Par 10
$z_{1,2}$	40/-600	40/-600	50/-300
$m$	6 mm	10 mm	12 mm
$\alpha$	10°	14°	18°
$a$	-1680 mm	-2800 mm	-1500 mm
$x_1 = x_2$	0	0	0
$h_{a0}^*{}_{1,2}$	1,6/0,25	1,6/1,0	1,5/1,5
$d_{1,2}$	240/-3600 mm	400/-6000 mm	600/-3600 mm
$d_{a1,2}$	259/-3597 mm	432/-5980 mm	631/-3568 mm
$d_{b1,2}$	236,35/-3545,31 mm	388,12/-5821,77 mm	570,63/-3423,80 mm
$\varepsilon_a$	2,215	2,919	2,649
$\rho_{a0}^*{}_{1,2}$	0,200/0,200	0,200/0,200	0,200/0,200
$c^*{}_{1,2}$	0,200/0,350	0,200/0,250	0,200/0,200
$T_1$	500 Nm	500 Nm	1000 Nm
$T_2$	1000 Nm	1000 Nm	2000 Nm
$T_3$	2000 Nm	2000 Nm	4000 Nm

Tablica 8.3 Parametri geometrije zupčanih parova 8 - 10 za analizu metodom konačnih elemenata (nastavak)

Parametar	Par 8	Par 9	Par 10
$T_4$	3000 Nm	3000 Nm	6000 Nm
$F_{bt1}$	4200 N	2600 N	3500 N
$F_{bt2}$	8500 N	5200 N	7000 N
$F_{bt3}$	17000 N	10300 N	14000 N
$F_{bt4}$	25400 N	15500 N	21000 N

## 8.2 Rezultati analize raspodjele sile tijekom zahvata zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem provedene metodom konačnih elemenata

Slika 8.1. prikazuje raspodjelu sile tijekom zahvata zupčanog para 0.



Slika 8.1 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 0

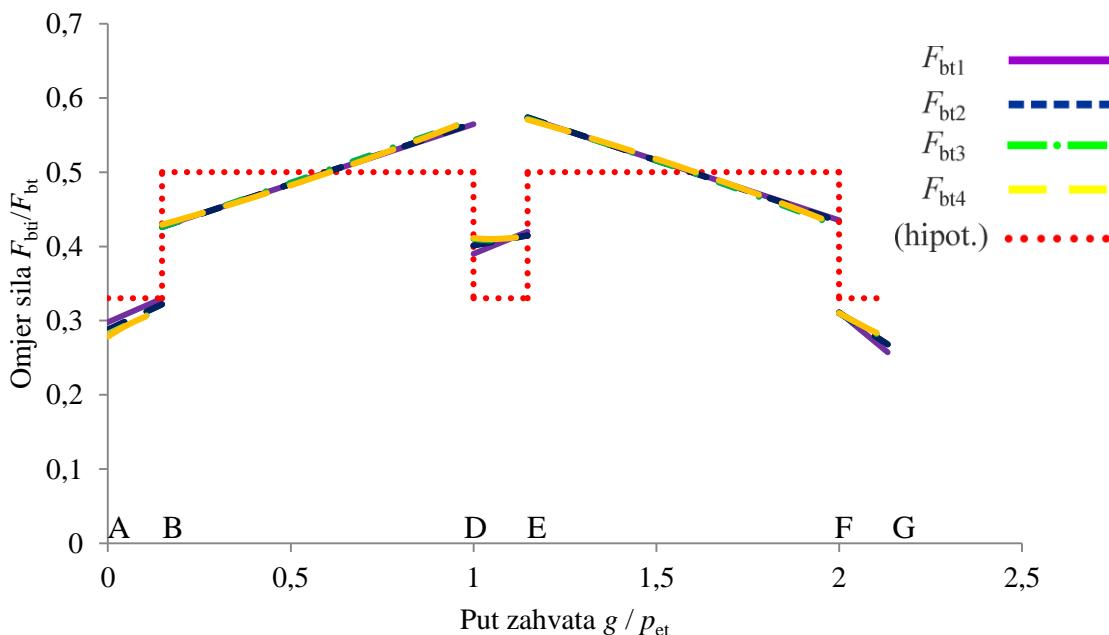
U području prvog trostrukog zahvata A-B omjer sila  $F_{bt_i} / F_{bt}$  manji je od 0,4 i smanjuje se s povećanjem vrijednosti sile  $F_{bt}$ .

U području drugog trostrukog zahvata D-E omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  nalazi se u području 0,4...0,45, dok u području trećeg trostrukog zahvata F-G ne prelazi 0,33, što se može objasniti povećanom krutošću parova zuba na polovici zahvatnog puta.

Postupno povećanje i smanjivanje omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u područjima A-B i F-G u skladu je s ulaskom i izlaskom zuba iz zahvata.

Omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  najveći je u područjima dvostrukog zahvata B-D i E-F te postiže najveću vrijednost u točki zahvata D, što se podudara s rezultatima istraživanja vanjskog ozubljenja [35]. Prilikom opterećenja najmanjom silom na zahvatnoj crti  $F_{bt1}$  izražena je vršna vrijednost omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u točki D (0,62) te postepeno pada s povećanjem sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ . Prilikom opterećenja najvećom silom na zahvatnoj crti  $F_{bt4}$  vrijednosti omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u točkama D (0,59) i E (0,58) gotovo su jednake, što se može objasniti manjim progibom zuba zupčanika prilikom opterećenja manjom silom na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  i nejednolikom raspodjelom sile na parove zuba u zahvatu u takvim uvjetima.

Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 1 prikazana je na slici 8.2.



Slika 8.2 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 1

Omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u području prvog trostrukog zahvata A-B manji je od 0,33 u točki zahvata B, dok u području drugog trostrukog zahvata D-E omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  iznosi 0,4...0,42, što se može objasniti povećanom krutošću parova zuba na polovici zahvatnog puta.

Omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u području trećeg trostrukog zahvata F-G ostaje manji od 0,33 te postepeno pada prema kraju zahvatnog puta u točki G.

Postepeno povećanje i smanjivanje omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u područjima A-B i F-G odgovara ulasku i izlasku zuba iz zahvata.

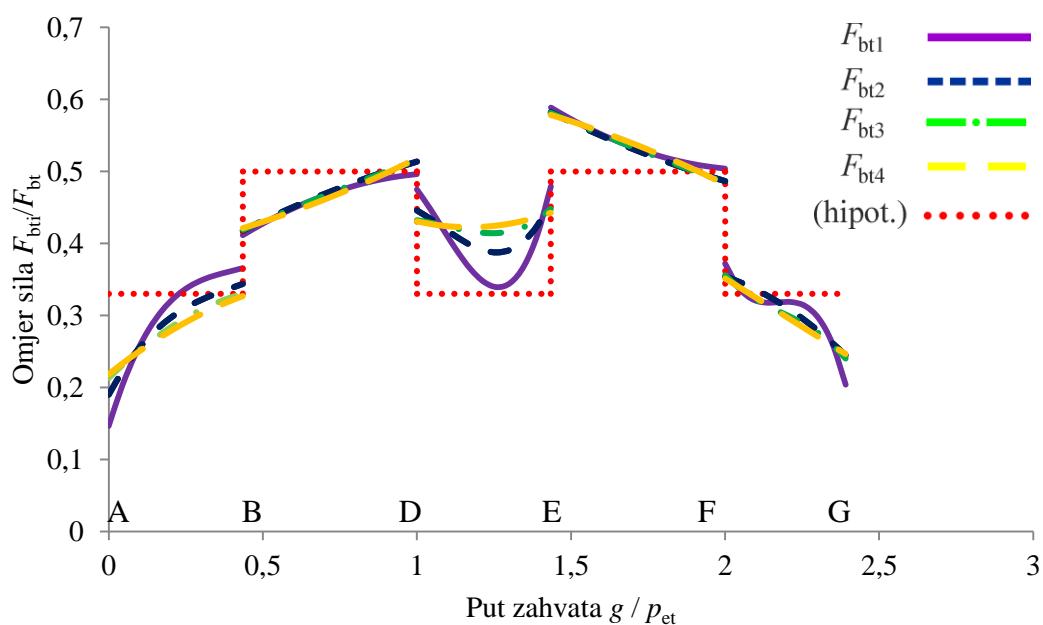
Područja trostrukog zahvata su kratka zbog stupnja prekrivanja  $\varepsilon_a = 2,15$ , što označava početak razmatranog područja stupnja prekrivanja VPP ozubljenja.

Omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  najveći je u području prvog dvostrukog zahvata B-D te u području drugog dvostrukog zahvata E-F. U sva četiri slučaja opterećenja silom  $F_{bt}$  omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  ima jasno izraženu maksimalnu vrijednost u točki E (0,57).

Ta maksimalna vrijednost odstupa od hipotetske raspodjele sile u zahvatu te je neznatno veća od vrijednosti u točki D (0,56).

Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 2 prikazana je na slici 8.3.

Zbog velike krutosti parova zuba u zahvatu graf raspodjele sile poprima svoj karakteristični oblik tek pri opterećenju silom  $F_{bt3} = 14200$  N ili  $F_{bt4} = 21300$  N.



Slika 8.3 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 2

U području prvog trostrukog zahvata A-B i u području trećeg trostrukog zahvata F-G omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  iznosi 0,22...0,31, dok u području drugog trostrukog zahvata D-E omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  iznosi oko 0,42.

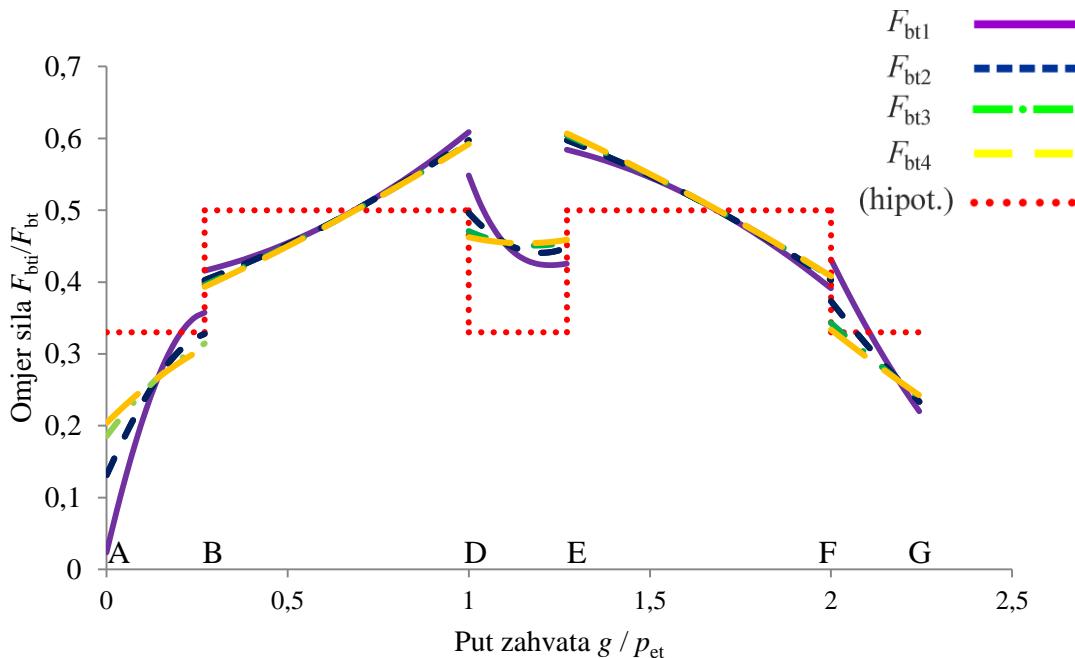
Postupno povećanje i smanjivanje omjera sile u područjima prvog i trećeg trostrukog zahvata A-B i F-G odgovara ulasku i izlasku zuba iz zahvata. Područja trostrukog i dvostrukog

zahvata su jednolično raspoređena uzduž puta zahvata zbog stupnja prekrivanja  $\varepsilon_a = 2,44$  koji se nalazi u sredini razmatranog područja stupnja prekrivanja VPP ozubljenja.

Omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  očekivano je najveći u područjima prvog i drugog dvostrukog zahvata B-D i E-F. U sva četiri slučaja opterećenja silom  $F_{bt}$  omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  postiže najveću vrijednost u točki zahvata E, što je u skladu s uputom u [22] za VPP ozubljenje.

Maksimalna vrijednost omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u točki zahvata E (0,58) odstupa od hipotetske raspodjele sile u zahvatu i veća je od vrijednosti omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u točki zahvata D (0,51).

Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 3 prikazana je na slici 8.4.



Slika 8.4 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 3

Kod manjih vrijednosti sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  opažena su odstupanja od uobičajenog izgleda raspodjele sile u zahvatu. Raspodjela sile u zahvatu potpuno poprima svoj karakteristični oblik tek pri opterećenju silom  $F_{bt4} = 21600$  N.

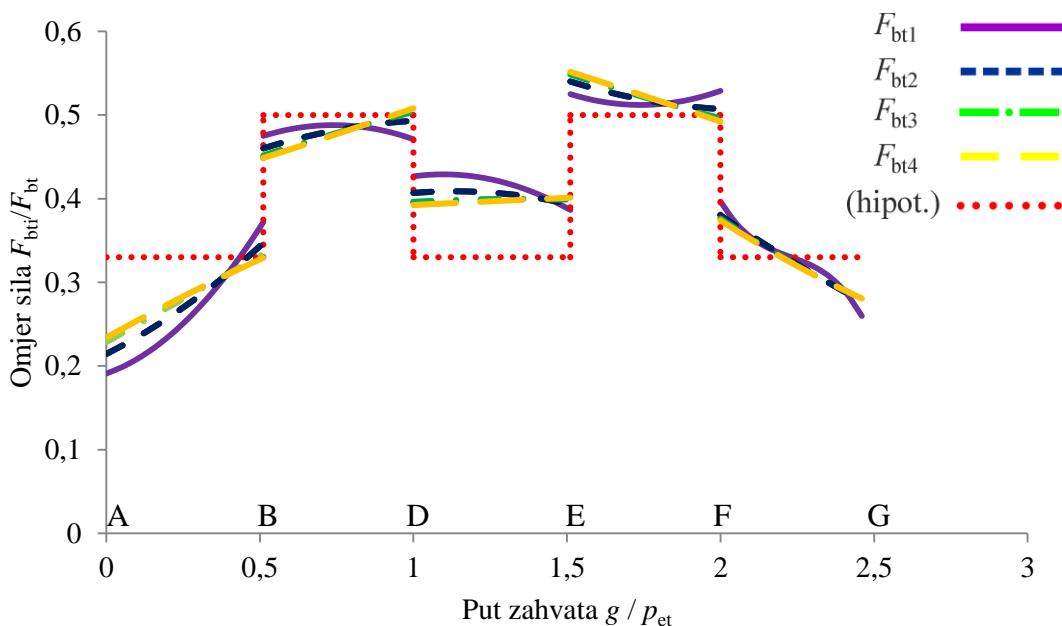
Prilikom opterećenja silom  $F_{bt1}$  omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u područjima prvog i trećeg trostrukog zahvata A-B i F-G prelazi 0,33 te ostaje manji od 0,3 tek pri djelovanju sile  $F_{bt4} = 21600$  N.

Postepeno povećanje i smanjivanje omjera sile u područjima prvog i trećeg trostrukog zahvata A-B i F-G odgovara ulasku i izlasku zuba iz zahvata. Raspored područja trostrukog i dvostrukog zahvata odgovara stupnju prekrivanja  $\varepsilon_a = 2,27$ , što se nalazi u donjem dijelu razmatranog područja stupnja prekrivanja VPP ozubljenja.

Omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  odstupa od hipotetske razdiobe sila u svim područjima zahvata, te je očekivano najveći u prvom i drugom području dvostrukog zahvata B-D i E-F.

Kod opterećenja najmanjom silom na zahvatnoj crti  $F_{bt1}$  omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  postiže najvišu vrijednost u točki zahvata D (0,58). S povećanjem sile  $F_{bt}$  najviša vrijednost omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  postepeno se seli u točku zahvata E (0,61) pri opterećenju silom  $F_{bt4}$ , što je u skladu s uputom u [22] za VPP zupčanike.

Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 4 prikazana je na slici 8.5.



Slika 8.5 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 4

Kod ovog para opažena su odstupanja raspodjele sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  samo prilikom opterećenja silom na zahvatnoj crti  $F_{bt1}$ , a raspodjela sile poprima svoj karakteristični oblik već prilikom opterećenja silom na zahvatnoj crti  $F_{bt2} = 6900$  N.

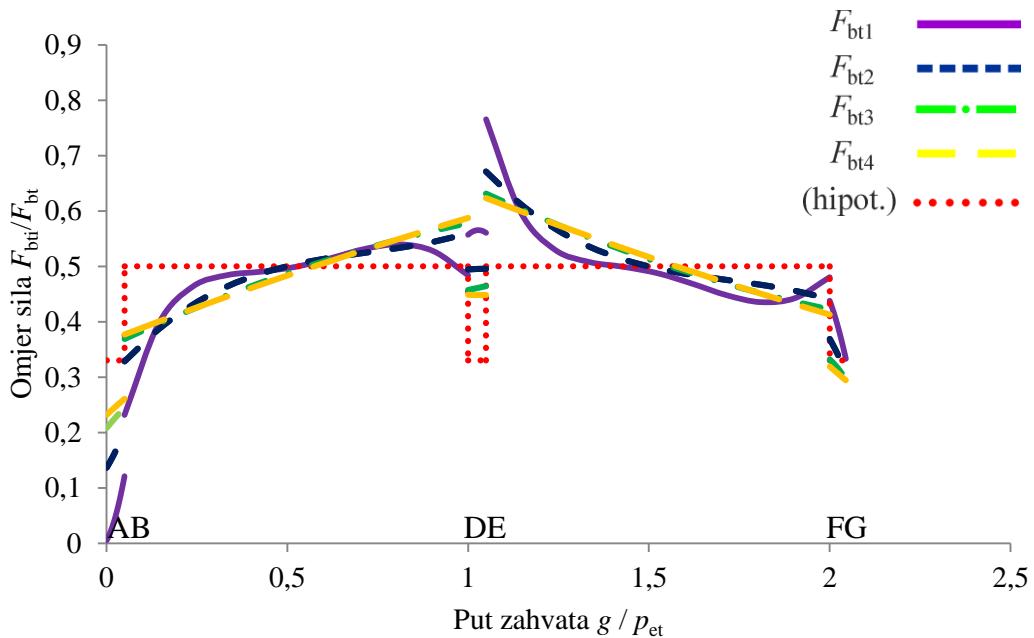
U području prvog trostrukog zahvata A-B omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  doseže maksimalnu vrijednost 0,34, u području drugog trostrukog zahvata D-E vrijednost omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  ostaje u blizini 0,4, dok je u području trećeg trostrukog zahvata F-G u rasponu 0,38...0,28.

Jednoličan raspored područja trostrukog i dvostrukog zahvata odgovara stupnju prekrivanja  $\varepsilon_a = 2,51$ , koji se nalazi u srednjem dijelu razmatranog raspona stupnja prekrivanja VPP ozubljenja.

Omjer sila u svim područjima zahvata odstupa od hipotetske razdiobe sila u zahvatu, te je očekivano najveći u područjima prvog i drugog dvostrukog zahvata B-D i E-F. U svim

slučajevima omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  postiže najvišu vrijednost u točki zahvata E (0,55), dok je maksimum za područje prvog dvostrukog zahvata B-D u točki zahvata D (0,51), što ukazuje na vrlo jednoliki raspored sile u zahvatu. Najviša vrijednost omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u točki zahvata E u skladu je s uputom u [22] za VPP zupčanike.

Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 5 prikazana je na slici 8.6.



Slika 8.6 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 5

Kod ovog zupčanog para opažena su odstupanja u raspodjeli sile prilikom opterećenja silom na zahvatnoj crti  $F_{bt1}$ , pri čemu omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  dostiže najvišu vrijednost u točki zahvata E (0,76). To je posljedica relativno velike krutosti zuba u odnosu na silu kojom je opterećen zupčani par. Raspodjela sile u potpunosti poprima svoj karakteristični oblik prilikom opterećenja silom na zahvatnoj crti  $F_{bt4} = 21000$  N. Područja trostrukog zahvata A-B, D-E i F-G vrlo su kratka, što odgovara zupčanom paru sa stupnjem prekrivanja  $\varepsilon_a = 2,05$ .

Vrlo mala vrijednost omjera sile  $F_{bt1} / F_{bt}$  u točki zahvata B prilikom opterećenja silom  $F_{bt1}$  može ukazivati na prebacivanje opterećenja na drugi par zuba pri dvostrukom zahvatu.

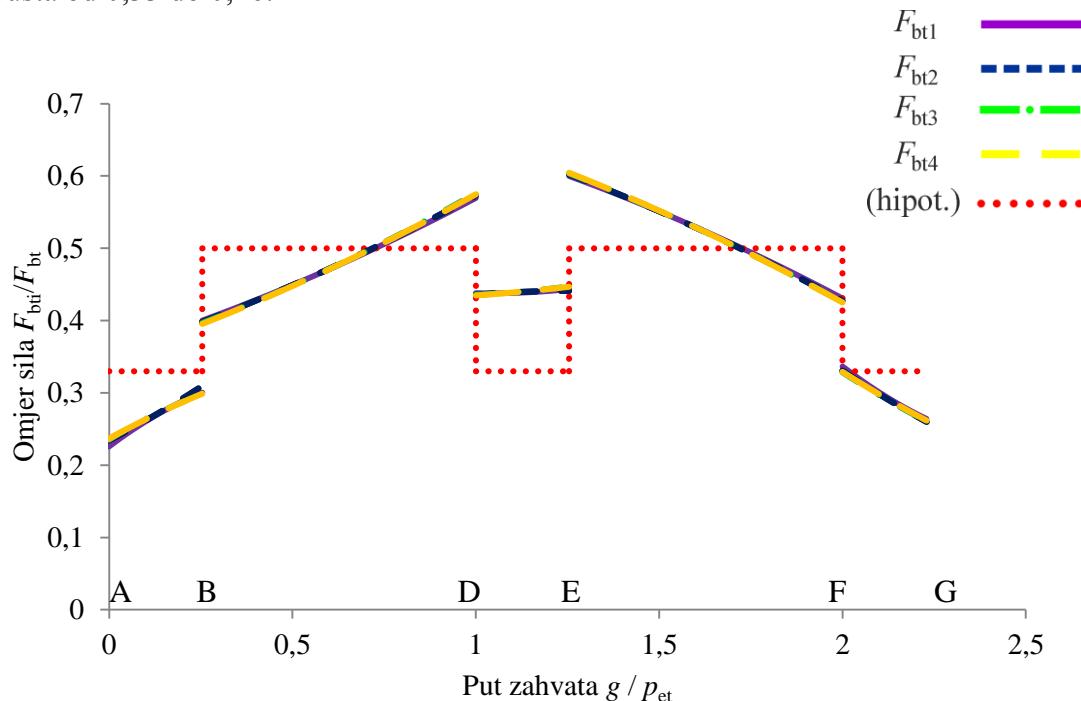
U prvom području trostrukog zahvata A-B vrijednost omjera sile  $F_{bt1} / F_{bt}$  ne prelazi 0,26, u drugom području trostrukog zahvata D-E vrijednost omjera sile  $F_{bt1} / F_{bt}$  ne prelazi 0,45, dok u području trećeg trostrukog zahvata F-G vrijednost omjera sile  $F_{bt1} / F_{bt}$  pada do 0,28. Vrijednosti omjera sile  $F_{bt1} / F_{bt}$  u navedenim područjima povećavaju se proporcionalno povećanju ukupne sile  $F_{bt}$ . Omjer sile  $F_{bt1} / F_{bt}$  u svim područjima odstupa od hipotetske

razdiobe sila u zahvatu uz vrlo jasno izraženu najveću vrijednost u točki zahvata E, što je u skladu s uputom u [22] za VPP zupčanike.

Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 6 prikazana je na slici 8.7.

Ovaj zupčani par izrađen je s malim modulom  $m = 4$  mm, zbog čega će krutost parova zuba u zahvatu biti niža pa graf raspodjele sile u tijeku zahvata odmah poprima svoj karakteristični oblik.

U području prvog trostrukog zahvata A-B omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  ne prelazi 0,29, u području drugog trostrukog zahvata D-E iznosi oko 0,45, dok se u području trećeg trostrukog zahvata F-G spušta od 0,33 do 0,26.



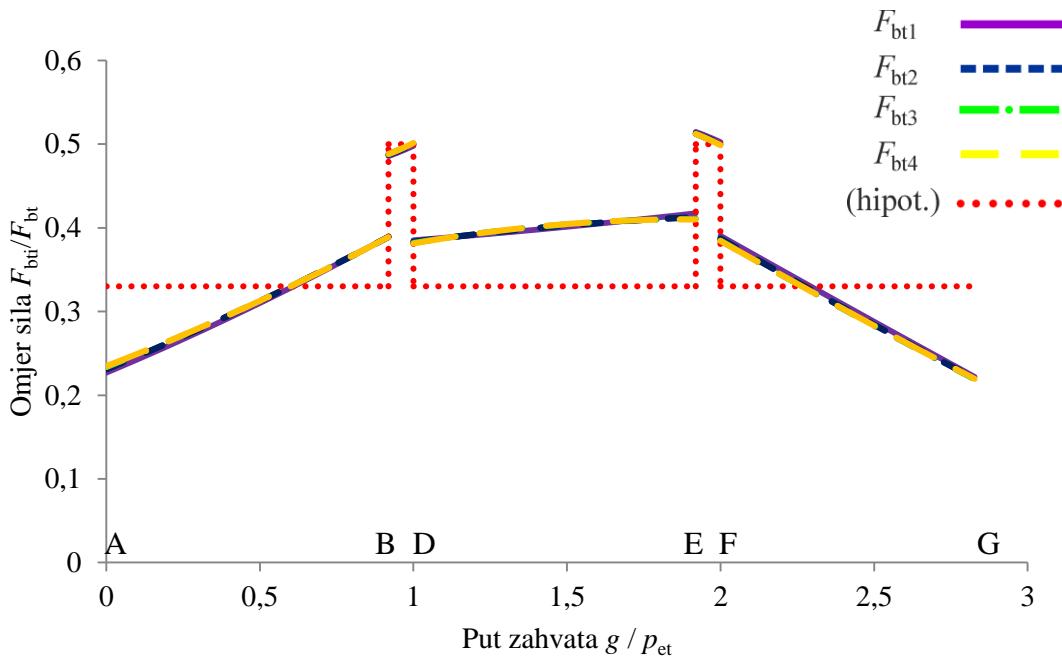
Slika 8.7 Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 6

Postupno povećanje i smanjivanje omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u područjima trostrukog zahvata A-B i F-G odgovara ulasku i izlasku zuba iz zahvata. Jasno su izražena velika područja dvostrukog zahvata zbog stupnja prekrivanja  $\varepsilon_a = 2,25$ , koji se nalazi u donjem dijelu razmatranog raspona stupnja prekrivanja VPP ozubljenja.

Vrijednost omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  očekivano je najveća u područjima dvostrukog zahvata B-D i E-F, te u sva četiri slučaja opterećenja silom na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  ima jasno izraženu najveću vrijednost u točki zahvata E (0,6), što je u skladu s uputom u [22] za VPP zupčanike.

Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 7 prikazana je na slici 8.8.

Zupčani par 7 izrađen je s malim modulom  $m = 4$  mm i velikim stupnjem prekrivanja  $\varepsilon_a = 2,92$ , što je na gornjoj granici razmatranog područja stupnja prekrivanja VPP zupčanika.



Slika 8.8 Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 7

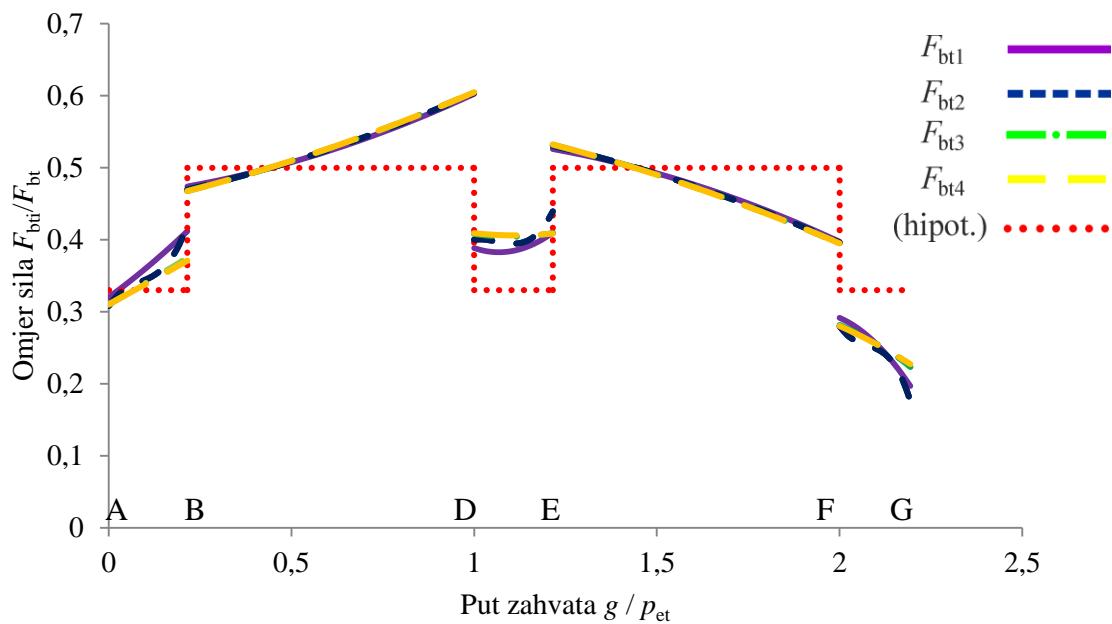
Područja dvostrukog zahvata B-D i E-F vrlo su kratka, uz izražene najviše vrijednosti omjera sila  $F_{bt_i} / F_{bt}$  u točki zahvata D (0,5) i u točki zahvata E (0,51).

U području prvog trostrukog zahvata A-B omjer sila  $F_{bt_i} / F_{bt}$  raste gotovo linearno od 0,25 do 0,37, u području drugog trostrukog zahvata D-E penje se do 0,41, dok se u području trećeg trostrukog zahvata F-G spušta od 0,39 do 0,22. Najviša vrijednost omjera sila  $F_{bt_i} / F_{bt}$  u točki E u skladu je s uputom iz [22] za VPP zupčanike.

Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 8 prikazana je na slici 8.9.

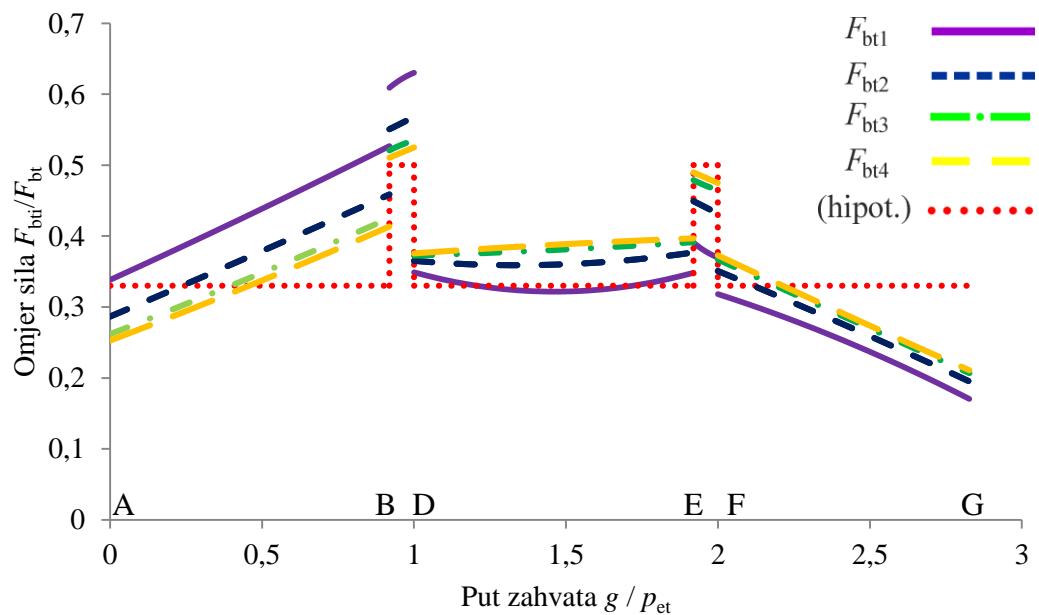
Zupčani par je izведен s malim modulom  $m = 4$  mm i vrlo malim zahvatnim kutom  $\alpha = 10^\circ$  te stupnjem prekrivanja  $\varepsilon_a = 2,22$ , što je u donjoj polovici razmatranog područja stupnja prekrivanja VPP ozubljenja. Područja dvostrukog zahvata B-D i E-F jasno su izražena, uz najveću vrijednost omjera sila  $F_{bt_i} / F_{bt}$  u točki D (0,59).

U područjima trostrukog zahvata A-B, D-E i F-G postoje manje varijacije u raspodjeli sile, koja pri djelovanju sile  $F_{bt4}$  postaje gotovo linearne. Pomak točke najveće vrijednosti omjera sila  $F_{bt_i} / F_{bt}$  u područje prvog dvostrukog zahvata može se objasniti malim kutom zahvata.



Slika 8.9 Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 8

Raspodjela sile u tijeku zahvata za zupčani par 9 prikazana je na slici 8.10.



Slika 8.10 Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 9

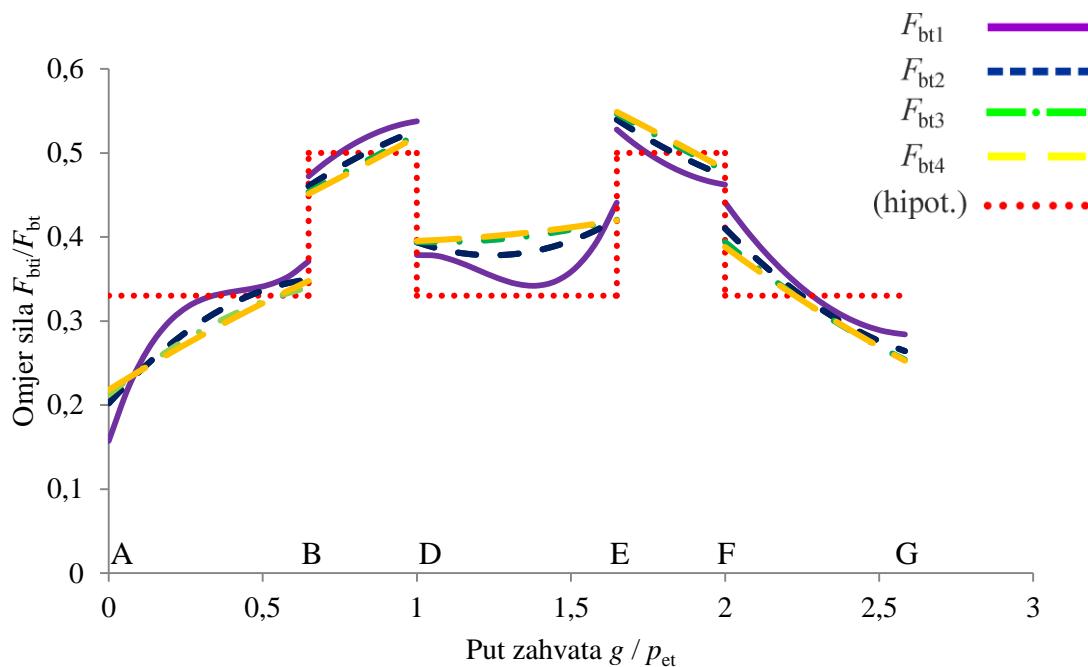
Zupčani par 9 izrađen je s malim zahvatnim kutom  $\alpha = 14^\circ$  te vrlo velikim stupnjem prekrivanja  $\varepsilon_\alpha = 2,92$ . U području prvog trostrukog zahvata A-B postoje značajne razlike u vrijednostima omjera sila  $F_{bt_i} / F_{bt}$ , no vrijednost omjera sila mijenja se linearno u svim

promatranim slučajevima. Područja dvostrukog zahvata B-D i E-F jasno su izražena, uz najvišu vrijednost omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u točki D (0,53). Pomak točke najvišeg naprezanja u prvi period dvostrukog zahvata se može objasniti malim kutom zahvata.

Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 10 prikazana je na slici 8.11.

Zupčani par je izrađen s zahvatnim kutom  $\alpha = 18^\circ$  te stupnjem prekrivanja  $\varepsilon_\alpha = 2,65$ , što je u gornjem dijelu razmatranog područja stupnja prekrivanja VPP ozubljenja. Pri opterećenju silom  $F_{bt1}$  graf raspodjele sile jako je deformiran te potpuno postiže svoj ispravni oblik pri djelovanju najveće sile  $F_{bt4}$ .

Područja dvostrukog zahvata B-D i E-F jasno su izražena, uz najvišu vrijednost omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u točki E (0,55), što je u skladu s [22].



Slika 8.11 Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 10

Poznato je da se sa približavanjem vrijednosti stupnja prekrivanja profila  $\varepsilon_\alpha = 2$  produljuju područja dvostrukog zahvata, dok se područja trostrukog zahvata skraćuju. S druge strane, približavanjem vrijednosti stupnja prekrivanja profila  $\varepsilon_\alpha = 3$  produljuju se područja trostrukog zahvata, a područja dvostrukog zahvata se skraćuju. Prilikom analize raspodjele sile tijekom zahvata zupčanih parova prikazane u ovom radu uočeno je da je vrijednost omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u područjima dvostrukog zahvata za 30...50 % veća od vrijednosti omjera sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  u područjima trostrukog zahvata, što ukazuje na moguću pojavu udarnih opterećenja. Ova pojava izbjegla bi se izradom zupčanih parova kod kojih bi vrijednost stupnja prekrivanja

profila iznosila točno  $\varepsilon_a = 2$  ili točno  $\varepsilon_a = 3$ , što je nemoguće postići u praksi zbog elastične deformacije zupčanika tijekom zahvata.

Zbog toga se zaključuje da je kod VPP ozubljenja potrebno težiti tome da se postigne stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a$  što bliži 2,5, jer se kod te vrijednosti stupnja prekrivanja  $\varepsilon_a$  postiže jednolično izmjenjivanje područja dvostrukog i trostrukog zahvata.

Pojava udarnih opterećenja tijekom zahvata VPP ozubljenja može biti predmet budućih istraživanja.

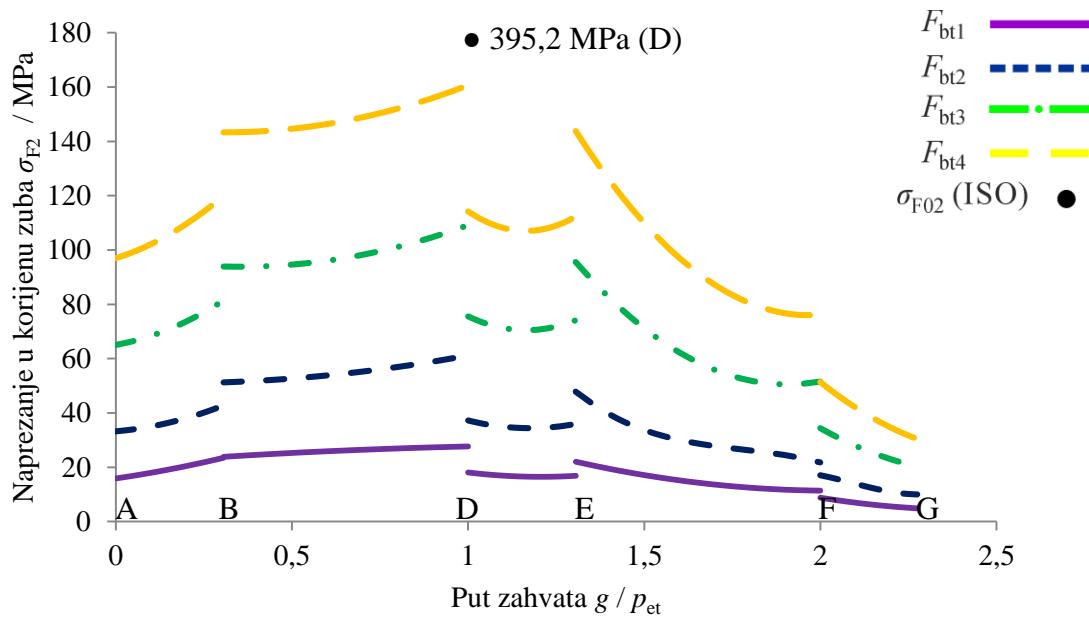
U toku istraživanja uočeno je da zahvatni kut utječe na mjesto točke zahvata u kojoj se javlja najveći omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  te da se ta točka nalazi u točki D za zahvatne kutove  $\alpha \leq 14^\circ$ , a u točki E za zahvatne kutove  $\alpha \geq 18^\circ$ . To znači da je udaljenost točke zahvata od korijena zuba zupčanika u kojoj se javlja najveći omjer sila  $F_{bt1} / F_{bt}$  promjenjiva i ovisi o primijenjenom zahvatnom kutu pa je potrebno istražiti utjecaj izbora točke zahvata na nosivost UVPP zupčanog para u ovisnosti o duljini kraka sile u točki najvećeg omjera  $F_{bt1} / F_{bt}$ , što je izvan opsega ovog rada.

### **8.3 Rezultati analize promjene naprezanja u korijenu zuba zupčanika zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata, provedene metodom konačnih elemenata**

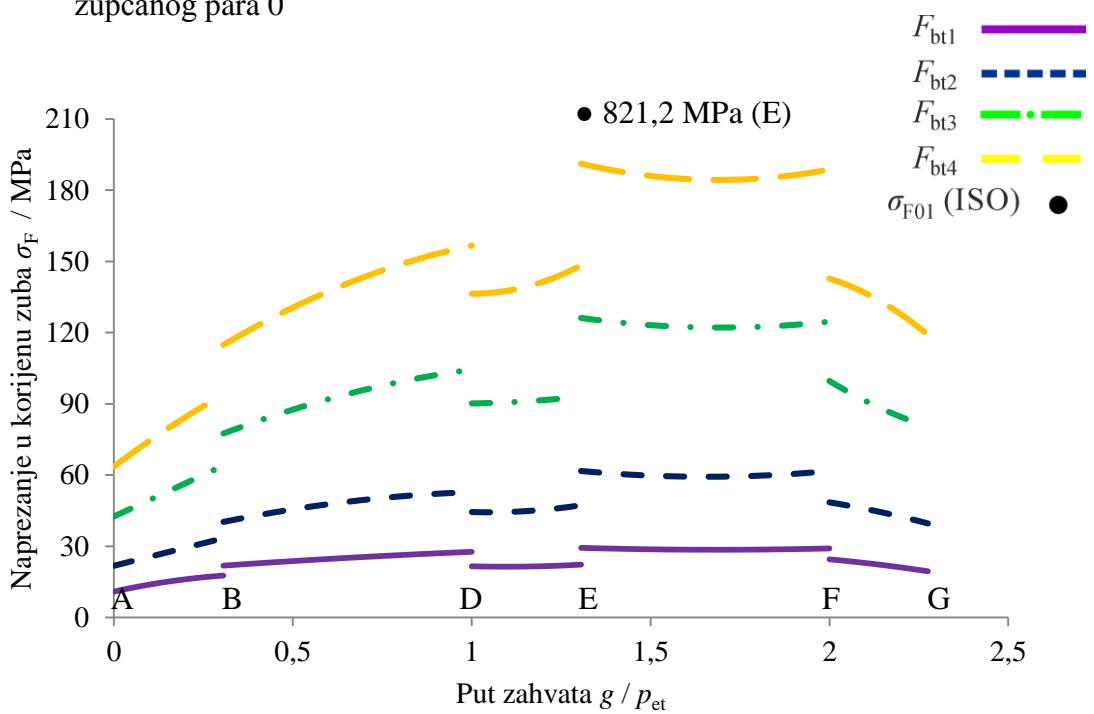
Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem prema normi ISO 6336 [22] u ovom poglavlju izračunate su korištenjem softvera ZupcanikUVPP, razvijenog za potrebe istraživanja u ovom radu.

Prilikom analize raspodjele sile u tijeku zahvata zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem uočeno je da zbog elastične deformacije zuba zupčanika u zahvatu dolazi do nepravilnosti u raspodjeli sile u zahvatu. Te nepravilnosti se gube s povećanjem sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  i potpuno se gube pri opterećenju najvećom silom  $F_{bt4}$ . Iz tog razloga, naprezanje u korijenu zuba zupčanika zupčanih parova prema normi ISO 6336 proračunato je samo za slučaj opterećenja najvećom silom  $F_{bt4}$ . Također je uočeno da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika izračunate prema normi ISO 6336 mnogo veće od vrijednosti dobivenih metodom konačnih elemenata te su zbog toga prikazane izvan mjerila.

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 0 prikazano je na slikama 8.12 i 8.13.



Slika 8.12 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 0



Slika 8.13 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 0

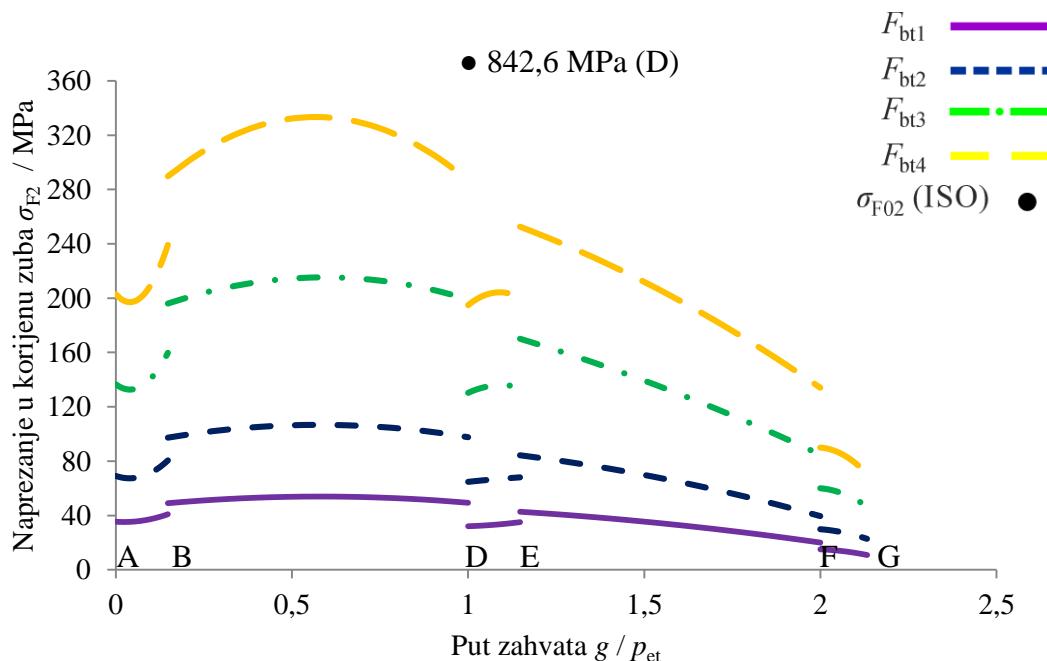
Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 0 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne

veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima. Stoga se zaključuje da je analiza ispravno provedena.

Najveće naprezanje u korijenu zuba nalazi se u točki zahvata D za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem, a u točki zahvata E za zupčanik s vanjskim ozubljenjem. Te točke odgovaraju proračunu prema normi ISO 6336 [22].

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem izračunato prema normi ISO 6336 [22] iznosi 247 % vrijednosti naprezanja prema MKE, a naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem iznosi 526 % vrijednosti naprezanja prema MKE.

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 1 prikazano je na slikama 8.14 i 8.15.

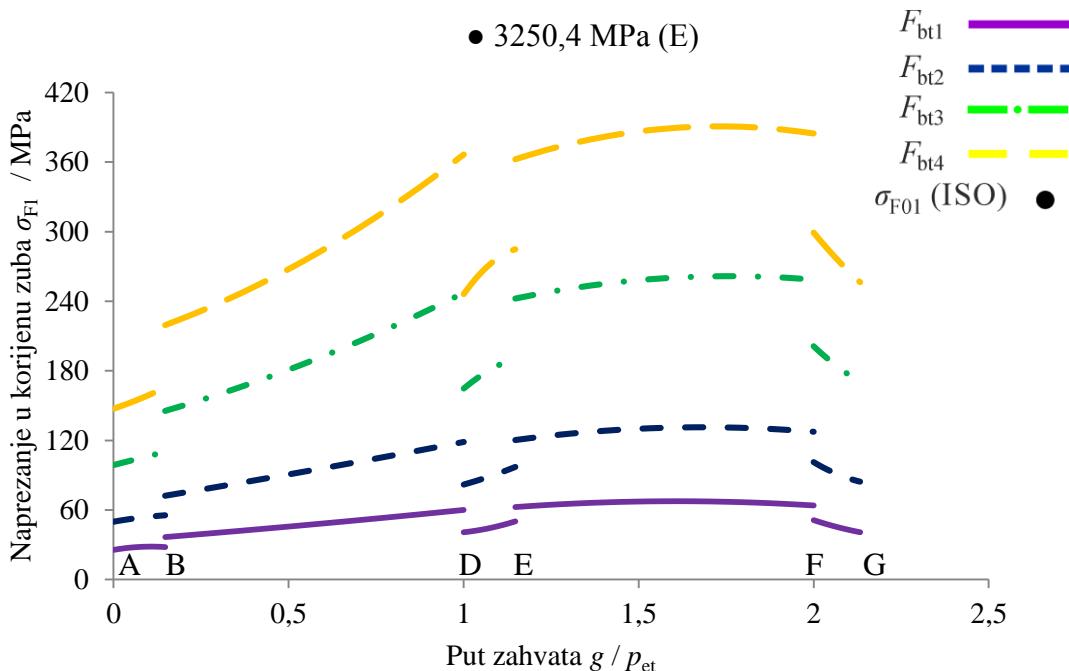


Slika 8.14 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 1

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 1 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima. Stoga se zaključuje da je analiza ispravno provedena.

Najveće naprezanje u korijenu zuba nalazi se na polovici dvostrukog zahvata B – D za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem te u blizini točke zahvata F za zupčanik s vanjskim ozubljenjem. Te točke odstupaju od točaka zahvata u kojima se pojavljuje najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika normi ISO 6336 [22].

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem izračunato prema normi ISO 6336 [22] iznosi 237 % vrijednosti naprezanja prema MKE, a naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem iznosi 791 % vrijednosti naprezanja prema MKE.

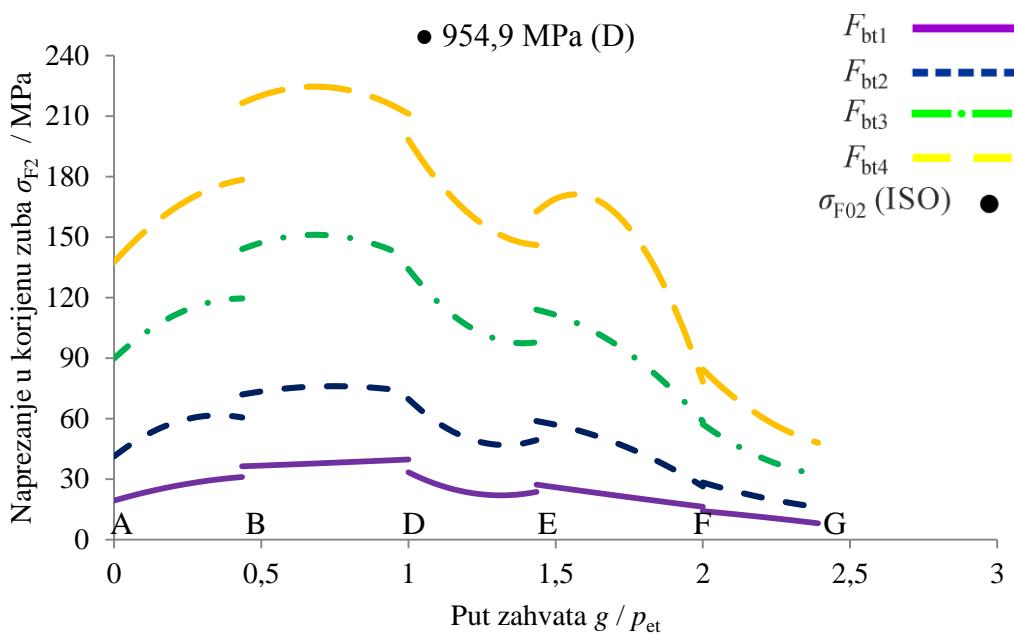


Slika 8.15 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 1

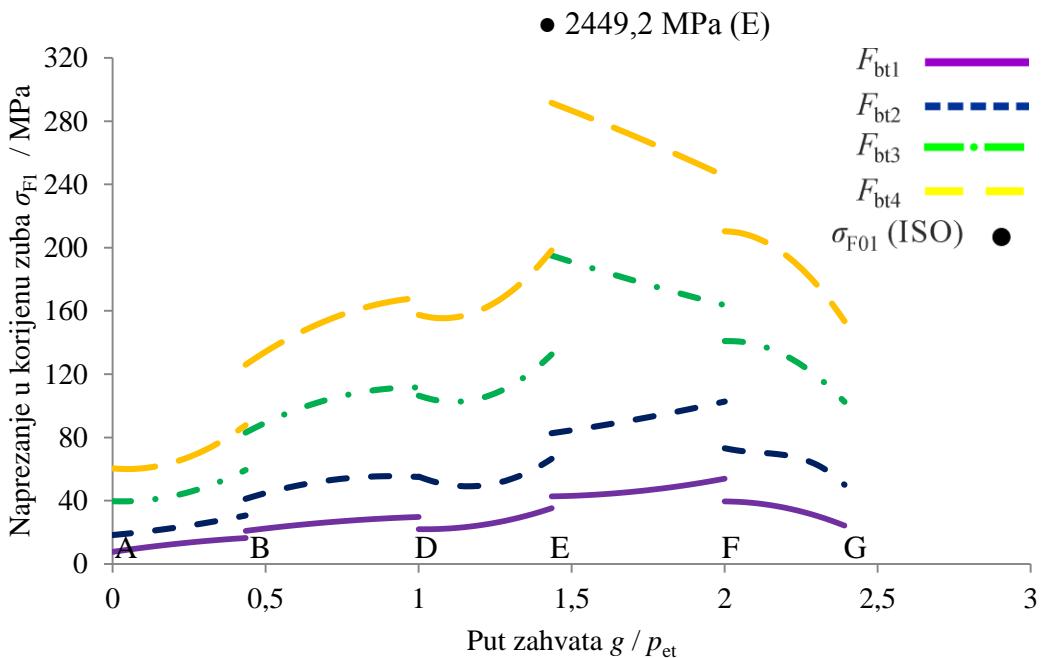
Naprezanje u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 2 prikazano je na slikama 8.16 i 8.17.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 2 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima. Stoga se zaključuje da je analiza ispravno provedena.

Najveće naprezanje u korijenu zuba nalazi se na polovici dvostrukog zahvata B – D za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem te u blizini točke zahvata E za zupčanik s vanjskim ozubljenjem. Točka u kojoj se pojavljuje najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem odstupa od točke zahvata u kojoj se pojavljuje najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika prema normi ISO 6336 [22].



Slika 8.16 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 2



Slika 8.17 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 2

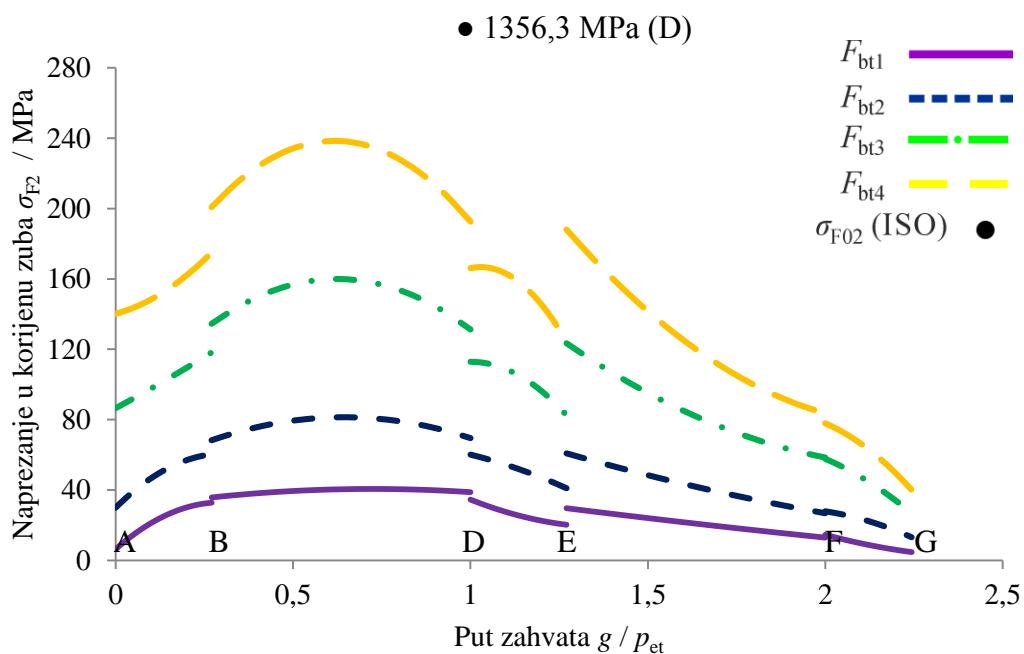
Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem izračunato prema normi ISO 6336 [22] iznosi 399 % vrijednosti naprezanja prema MKE, a naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem iznosi 875 % vrijednosti naprezanja prema MKE.

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 3 prikazano je na slikama 8.18 i 8.19.

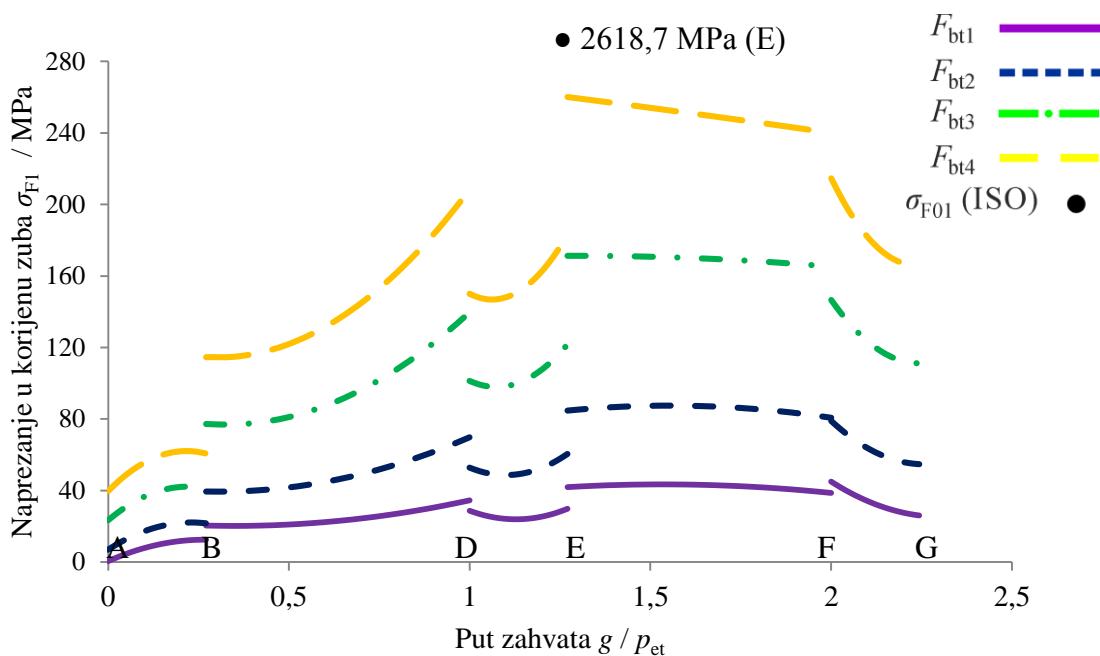
Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 3 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima. Stoga se zaključuje da je analiza ispravno provedena.

Najveće naprezanje u korijenu zuba nalazi se na polovici dvostrukog zahvata B – D za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem te u točki zahvata E za zupčanik s vanjskim ozubljenjem. Točka u kojoj se pojavljuje najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem odstupa od točke zahvata u kojoj se pojavljuje najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika prema normi ISO 6336 [22].

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem izračunato prema normi ISO 6336 [22] iznosi 507 % vrijednosti naprezanja prema MKE, a naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem iznosi 999 % vrijednosti naprezanja prema MKE.



Slika 8.18 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 3



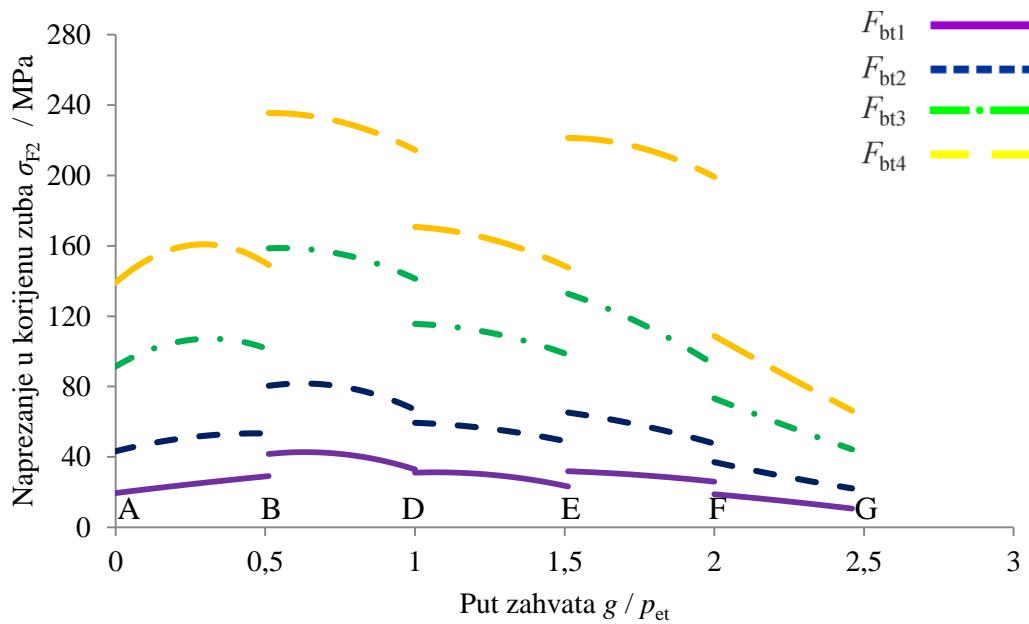
Slika 8.19 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 3

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 4 prikazano je na slikama 8.20 i 8.21.

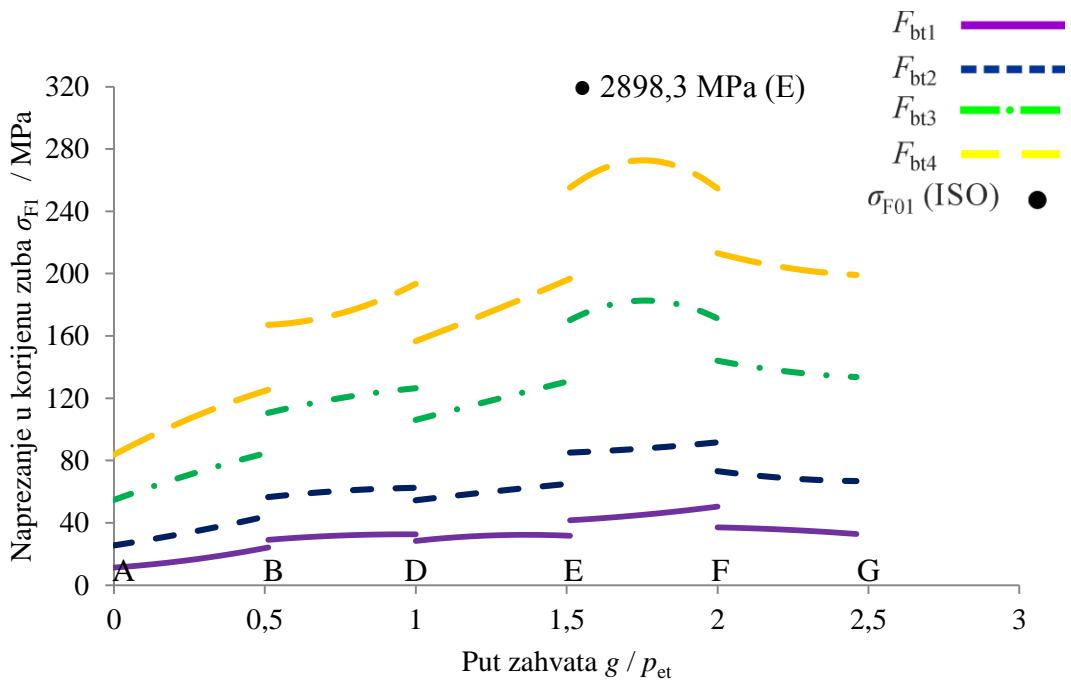
Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 4 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima. Stoga se zaključuje da je analiza ispravno provedena.

Najveće naprezanje u korijenu zuba nalazi se u točki zahvata B za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem te na polovici drugog dvostrukog zahvata E – F za zupčanik s vanjskim ozubljenjem. Točke u kojima se pojavljuje najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika odstupaju od točaka zahvata u kojima se pojavljuje najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika prema normi ISO 6336 [22].

Naprezanje prema normi ISO 6336 [22] za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem nije moguće izračunati zbog matematičkih ograničenja izraza za  $Y_F$  pri  $\alpha \neq 20^\circ$  (nije moguće izračunati vrijednost  $Y_F$  za  $\alpha = 14^\circ$ ), dok naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem iznosi 1047 % vrijednosti naprezanja prema MKE.



Slika 8.20 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 4

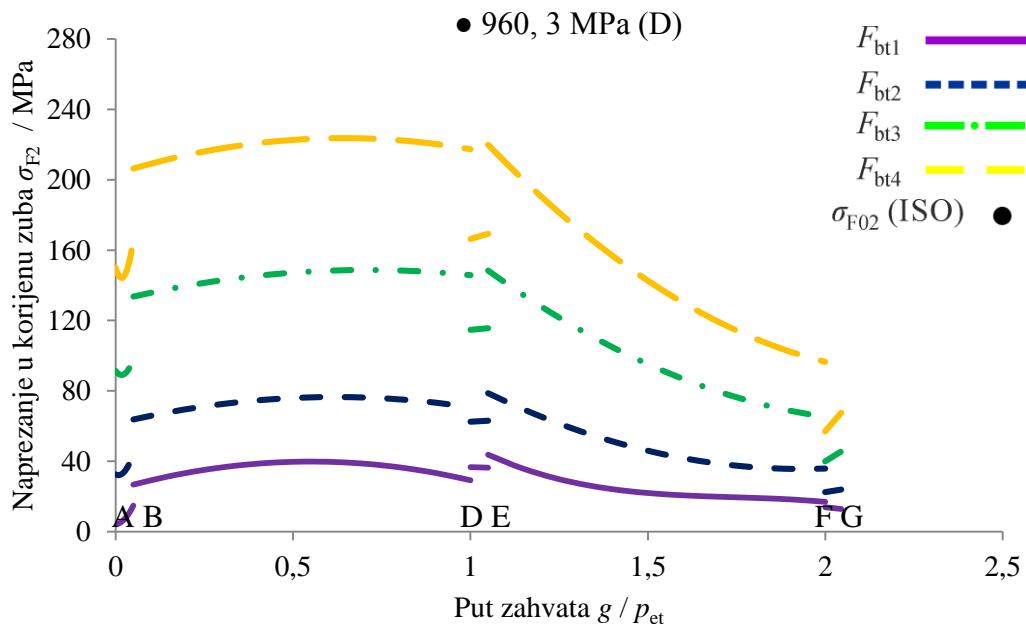


Slika 8.21 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 4

Područja dvostrukog i trostrukog zahvata vrlo su jednoliko raspoređena zbog stupnja prekrivanja profila u blizini  $\varepsilon_a \approx 2,5$  ( $\varepsilon_a = 2,511$ ).

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 5 prikazano je na slikama 8.22 i 8.23.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 5 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima. Stoga se zaključuje da je analiza ispravno provedena.

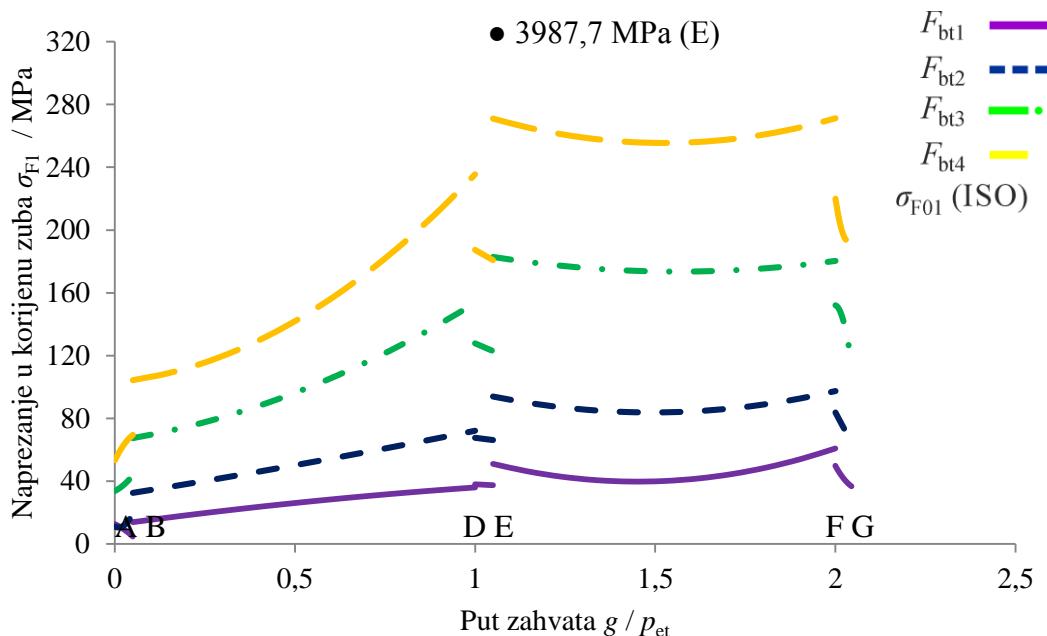


Slika 8.22 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 5

Najveće naprezanje u korijenu zuba nalazi se na polovici dvostrukog zahvata B – D za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem te u točki zahvata E za zupčanik s vanjskim ozubljenjem. Točka u kojoj se pojavljuje najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem odstupa od točke zahvata u kojoj se pojavljuje najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika prema normi ISO 6336 [22].

Uočavaju se duga područja dvostrukog zahvata, što odgovara zupčanom paru sa stupnjem prekrivanja u području  $\varepsilon_a \approx 2$  ( $\varepsilon_a = 2,05$ ).

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem izračunato prema normi ISO 6336 [22] iznosi 427 % vrijednosti naprezanja prema MKE, a naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem iznosi 1425 % vrijednosti naprezanja prema MKE.



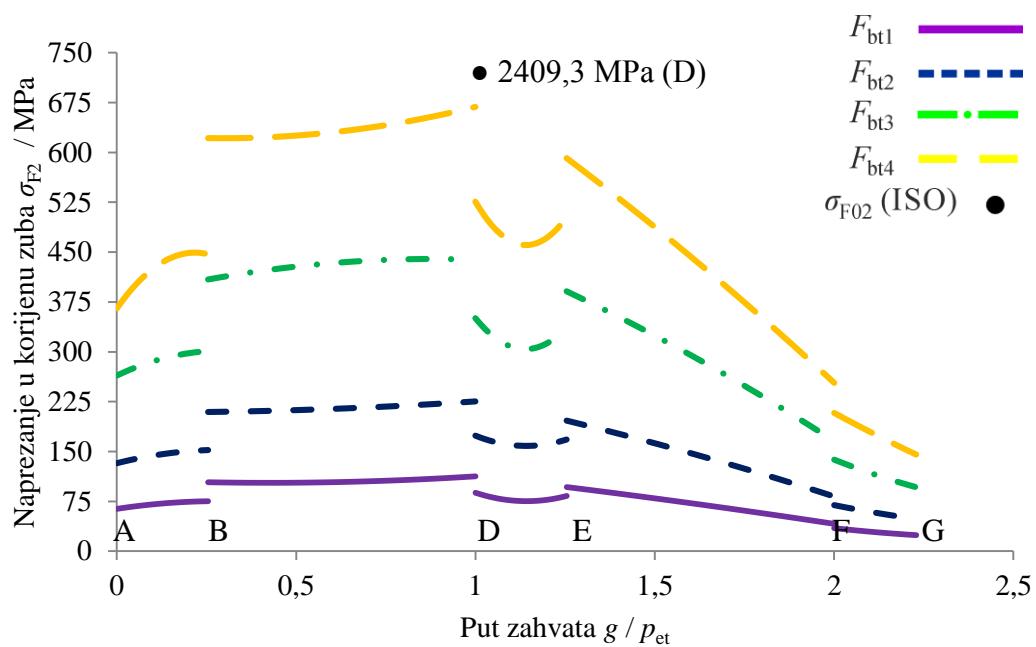
Slika 8.23 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u tijeku zahvata zupčanog para 5

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 6 prikazano je na slikama 8.24 i 8.25.

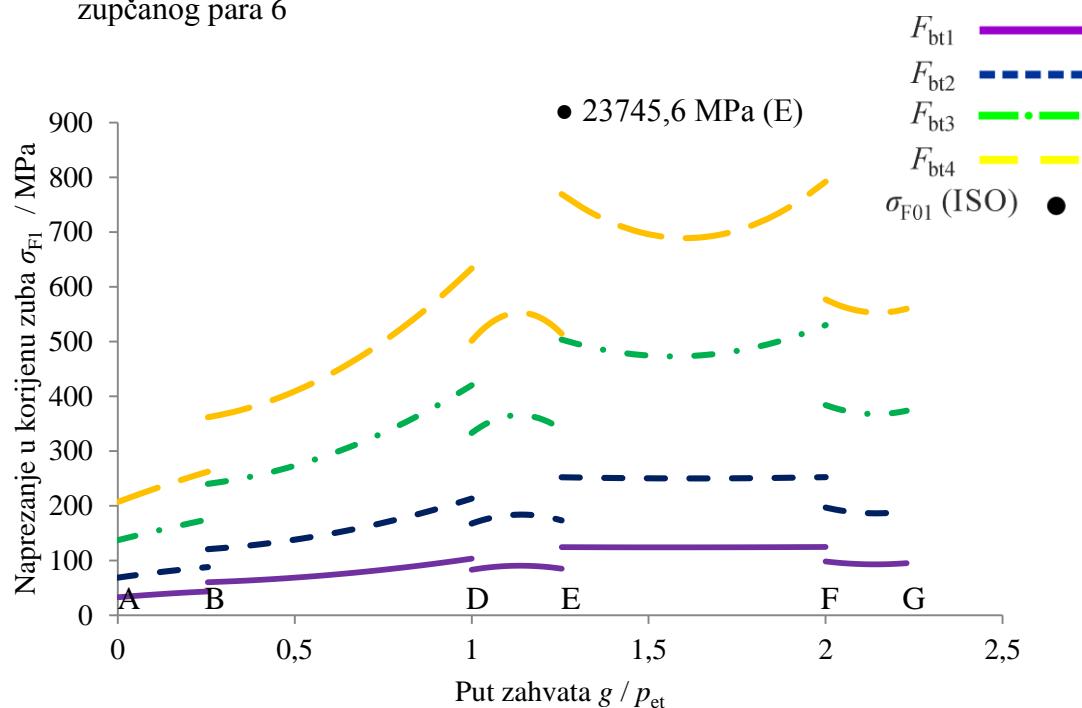
Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 6 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima. Stoga se zaključuje da je analiza ispravno provedena.

Najveće naprezanje u korijenu zuba nalazi se u točki zahvata D za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem te u točki zahvata E za zupčanik s vanjskim ozubljenjem, što odgovara točkama zahvata u kojima se pojavljuje najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika prema normi ISO 6336 [22].

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem izračunato prema normi ISO 6336 [22] iznosi 370 % vrijednosti naprezanja prema MKE, a naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem iznosi 3984 % vrijednosti naprezanja prema MKE.



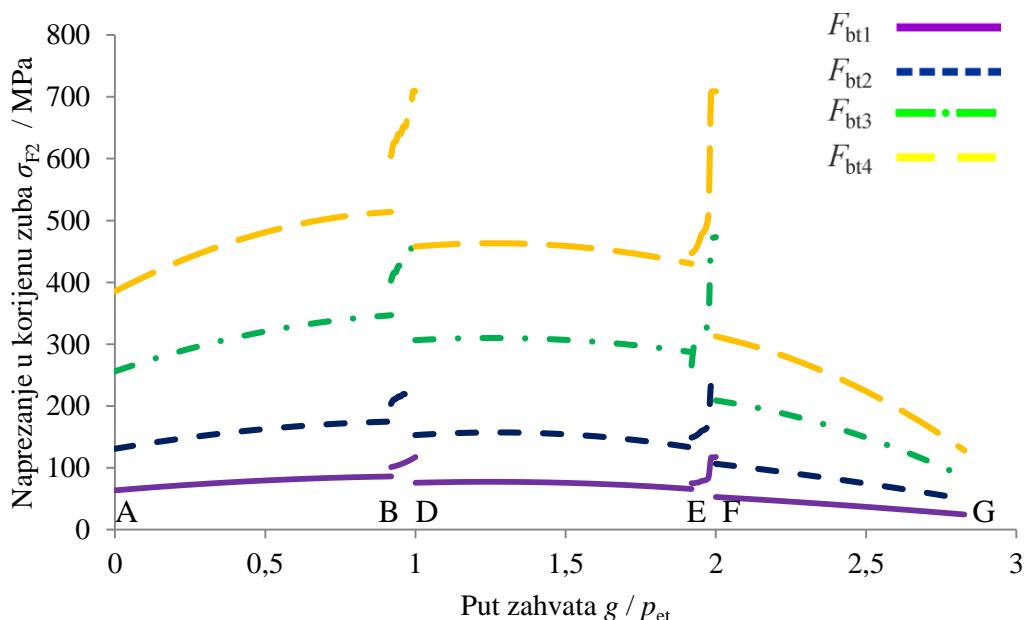
Slika 8.24 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 6



Slika 8.25 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 6

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 7 prikazano je na slikama 8.26 i 8.27.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 7 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima. Stoga se zaključuje da je analiza ispravno provedena.

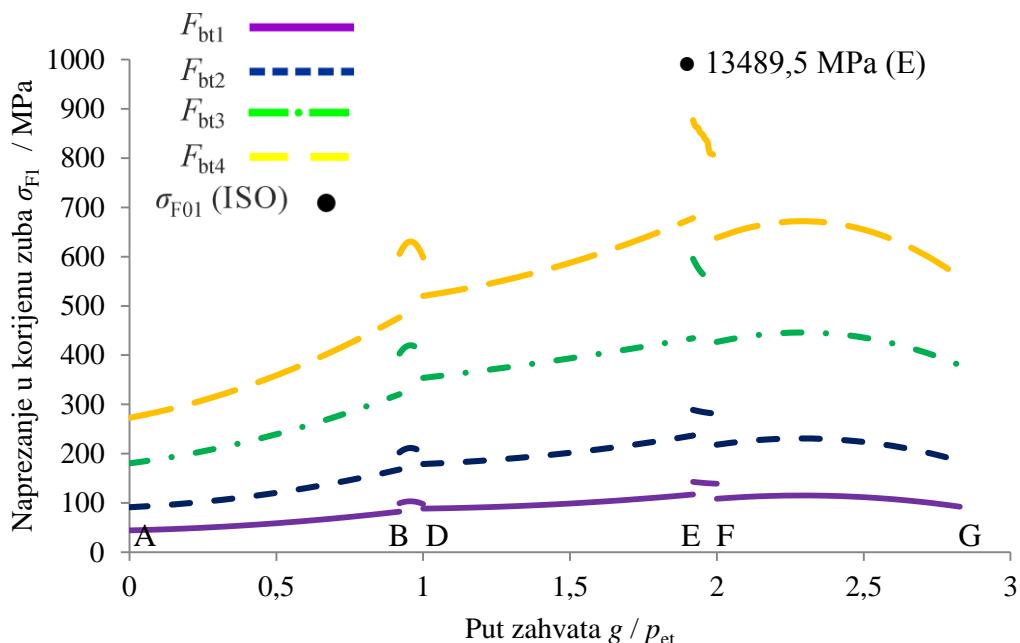


Slika 8.26 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 7

Točka zahvata u kojoj se pojavljuje najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem nije jasno definirana, budući da se pojavljuju dvije vrlo bliske vrijednosti, 709 MPa u točki zahvata D te 708 MPa u točki F. Najveća vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem nalazi se u točki zahvata E, što je u skladu s normom ISO 6336 [22].

Ovaj par zuba karakteriziraju široka područja trostrukog zahvata, uz vrlo izražene šiljke naprezanja u kratkim područjima dvostrukog zahvata, što odgovara paru zuba sa stupnjem prekrivanja u području  $\varepsilon_a \approx 3$  ( $\varepsilon_a = 2,919$ ).

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem nije bilo moguće izračunati prema normi ISO 6336 [22] zbog nemogućnosti proračunavanja vrijednosti faktora  $Y_F$  kod zahvatnog kuta  $\alpha = 14^\circ$ . Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem izračunato prema ISO normi iznosi 1907 % vrijednosti naprezanja prema MKE.

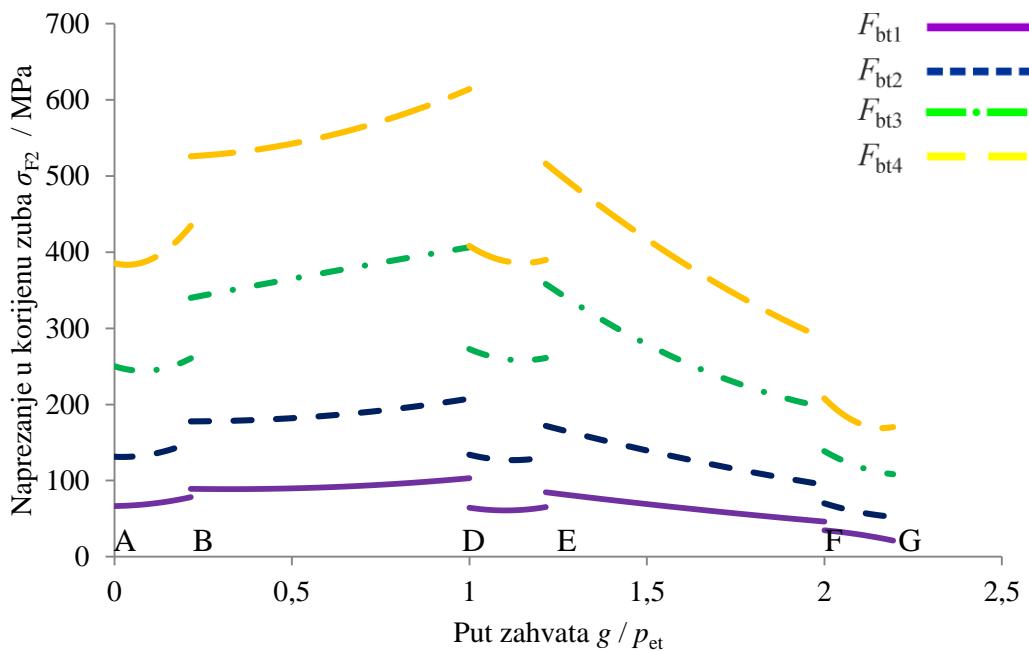


Slika 8.27 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 7

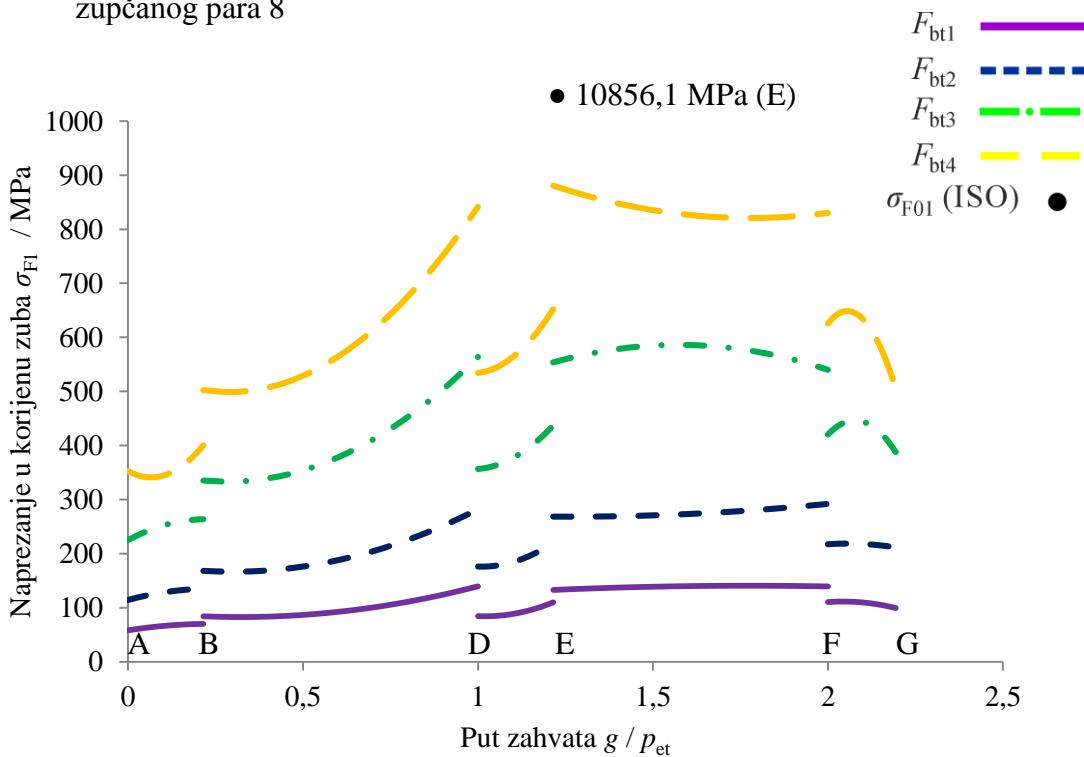
Naprezanje u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 8 prikazano je na slikama 8.28 i 8.29.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 8 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima. Stoga se zaključuje da je analiza ispravno provedena.

Najveća vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema MKE pojavljuje se u točki zahvata D, dok se najveća vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem pojavljuje u točki zahvata E, što je u skladu s normom ISO 6336 [22].



Slika 8.28 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u tijeku zahvata zupčanog para 8

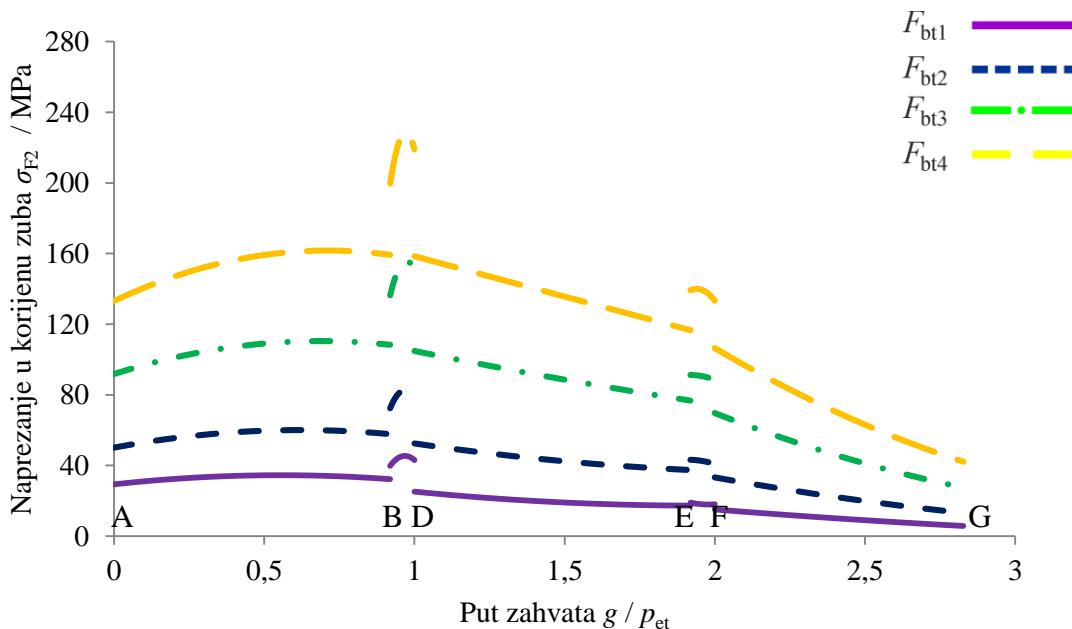


Slika 8.29 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 8

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem nije bilo moguće izračunati prema normi ISO 6336 [22], jer zbog zahvatnog kuta  $\alpha = 10^\circ$  izraz za  $Y_F$  ne daje suvisle

vrijednosti. Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem izračunato prema normi ISO 6336 [22] iznosi 1220 % vrijednosti naprezanja prema MKE.

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 9 prikazano je na slikama 8.30 i 8.31.



Slika 8.30 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 9

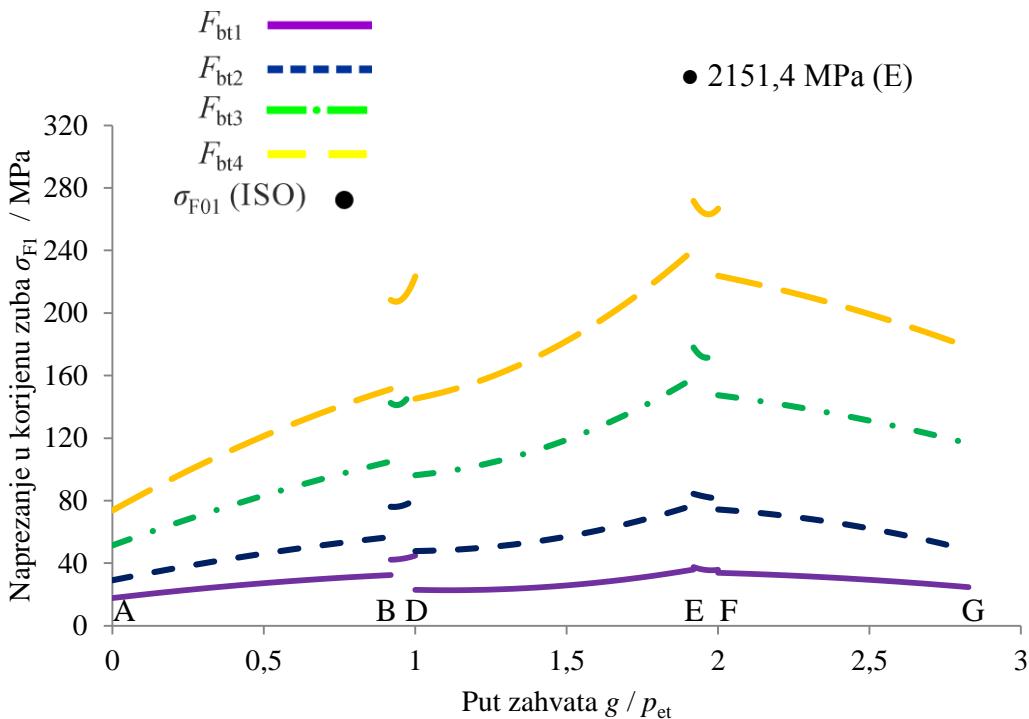
Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 9 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima. Stoga se zaključuje da je analiza ispravno provedena.

Najveća vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema MKE pojavljuje se na polovici prvog dvostrukog zahvata B – D. Najveća vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem pojavljuje se u točki zahvata E, što je u skladu s normom ISO 6336 [22].

Područja dvostrukog zahvata vrlo su kratka što je u skladu sa stupnjem prekrivanja zupčanog para  $\varepsilon_a \approx 3$  ( $\varepsilon_a = 2,919$ ).

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem nije bilo moguće izračunati prema normi ISO 6336 [22], jer zbog zahvatnog kuta  $\alpha = 14^\circ$  izraz za  $Y_F$  ne daje suvisle

vrijednosti. Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem izračunato prema normi ISO 6336 [22] iznosi 776 % vrijednosti naprezanja prema MKE.



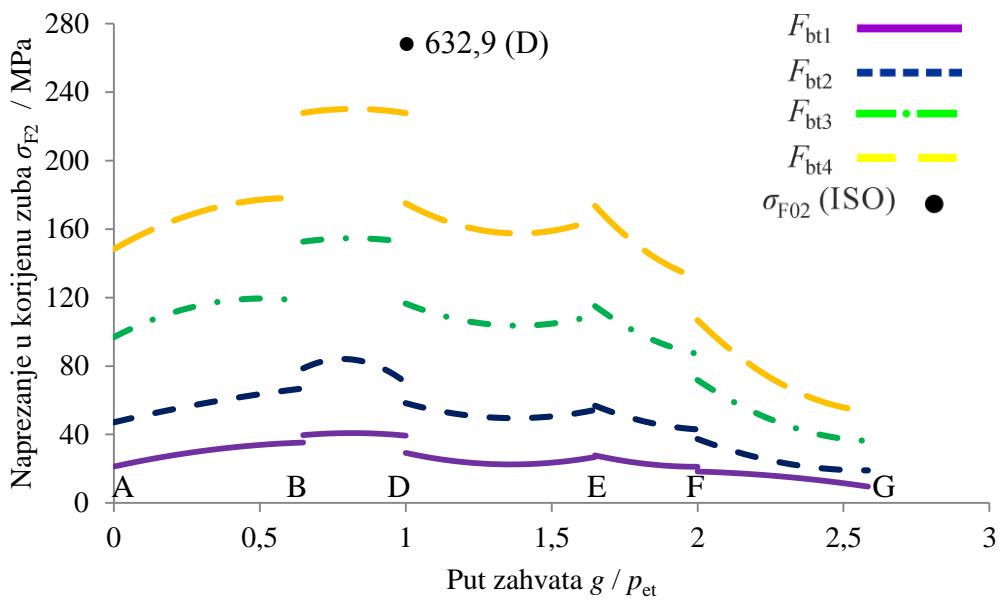
Slika 8.31 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 9

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 10 prikazano je na slikama 8.32 i 8.33.

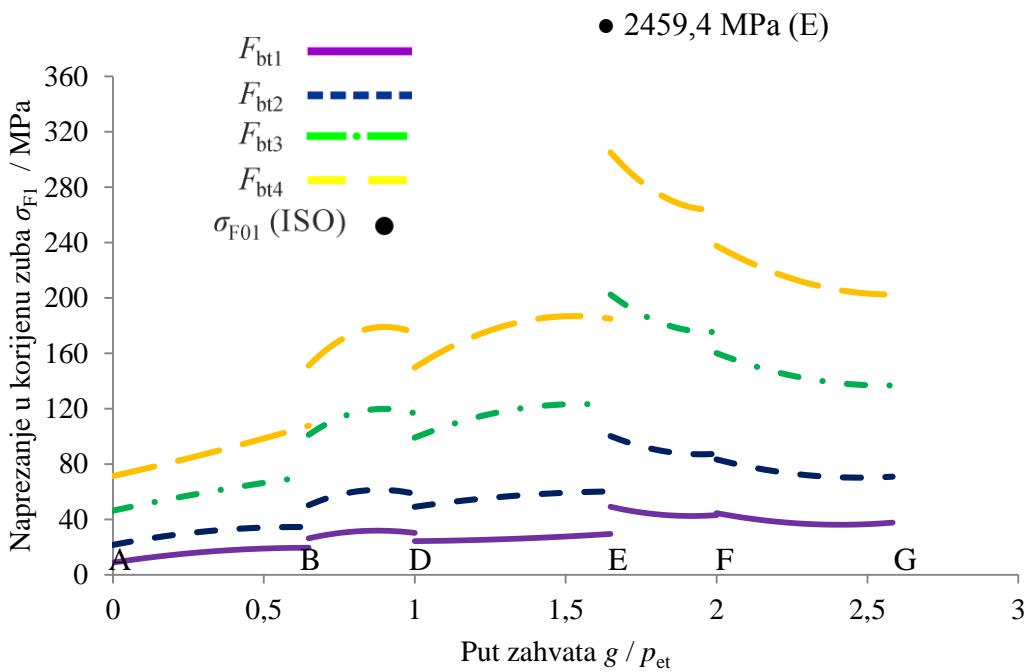
Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 10 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima. Stoga se zaključuje da je analiza ispravno provedena.

Najveća vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema MKE pojavljuje se na polovici prvog dvostrukog zahvata B – D. Najveća vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem pojavljuje se u točki zahvata E, što je u skladu s normom ISO 6336 [22].

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem izračunato prema normi ISO 6336 [22] iznosi 243 % vrijednosti naprezanja prema MKE, a vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem izračunata prema normi ISO 6336 [22] iznosi 814 % vrijednosti naprezanja prema MKE.



Slika 8.32 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 10



Slika 8.33 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 10

Analizom promjene vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem utvrđeno je da se najveće vrijednosti naprezanja u

korijenu zuba zupčanika pojavljuju u područjima prvog i drugog dvostrukog zahvata, što je u skladu s očekivanjima.

Utvrđeno je i da se najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika ne mora pojaviti u točkama zahvata D za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem te E za zupčanik s vanjskim ozubljenjem, kako je navedeno u normi ISO 6336 [22].

Umjesto toga, najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem može se pojaviti i unutar područja prvog dvostrukog zahvata B – D te u točki E drugog dvostrukog zahvata. Kod zupčanika s vanjskim ozubljenjem, najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika može se pojaviti unutar područja drugog dvostrukog zahvata E – F, ili u točki zahvata F.

Kod zupčanika s unutarnjim ozubljenjem poseban problem predstavljaju zahvatni kutevi  $\alpha < 20^\circ$ . U tim slučajevima mogu se dobiti nesuvisle vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prilikom proračuna prema normi ISO 6336 [22], zbog negativne vrijednosti faktora  $Y_F$ .

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem prema normi ISO 6336 [22] računaju se uvijek uz punu vrijednost ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ , čak i kod VPP/UVPP zupčanih parova. Zbog toga su tako dobivene vrijednosti naprezanja bitno veće od vrijednosti dobivenih putem MKE.

Na temelju navedenoga, zaključuje se da je potvrđeno da je proračun vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema [22] daje prevelike vrijednosti naprezanja te da je potrebno usvojiti točniji postupak proračuna.

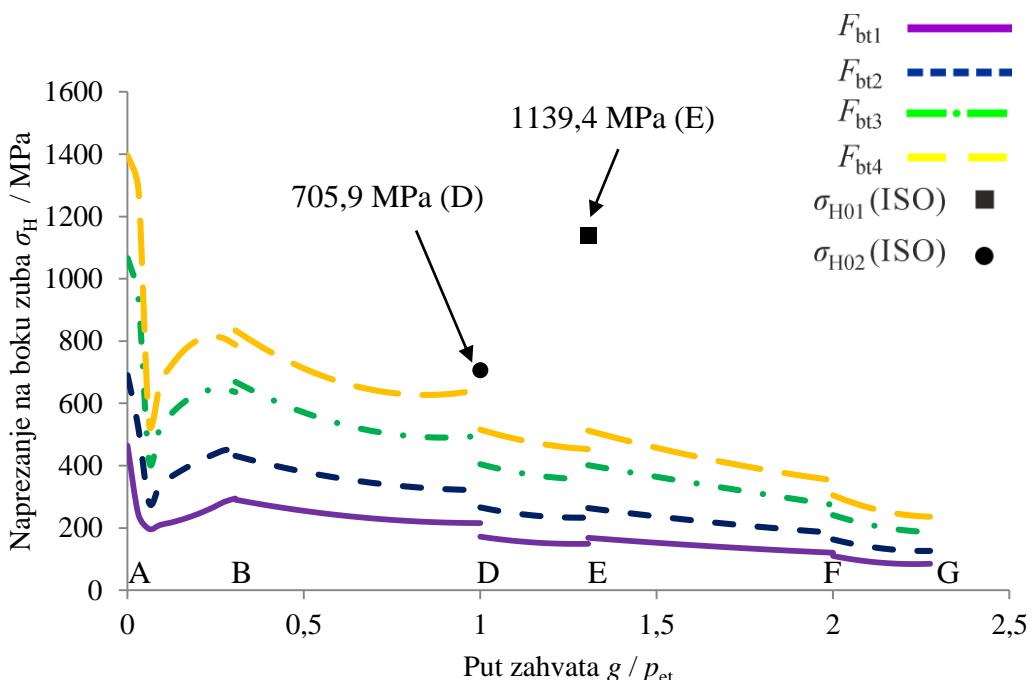
Rezultati dobiveni takvim postupkom proračuna prema [49], [48], [52] prikazani su u poglavljju 8.5.

## 8.4 Rezultati analize promjene naprezanja na boku zuba zupčanika zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata, provedene metodom konačnih elemenata

Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem prema normi ISO 6336 [22] u ovom poglavlju izračunate su korištenjem softvera ZupcanikUVPP.

Prilikom analize raspodjele sile u tijeku zahvata zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem uočeno je da zbog elastične deformacije zuba zupčanika u zahvatu dolazi do nepravilnosti u raspodjeli sile u zahvatu, a te nepravilnosti smanjuju se s povećanjem sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  i potpuno izostaju pri opterećenju najvećom silom  $F_{bt4}$ . Zbog toga je naprezanje na boku zuba zupčanika zupčanih parova prema normi ISO 6336 proračunato samo za slučaj opterećenja silom  $F_{bt4}$ . Uočeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika izračunate prema normi ISO 6336 veće od vrijednosti dobivenih metodom konačnih elemenata u odgovarajućim točkama zahvata.

Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 0 prikazano je na slici 8.34.



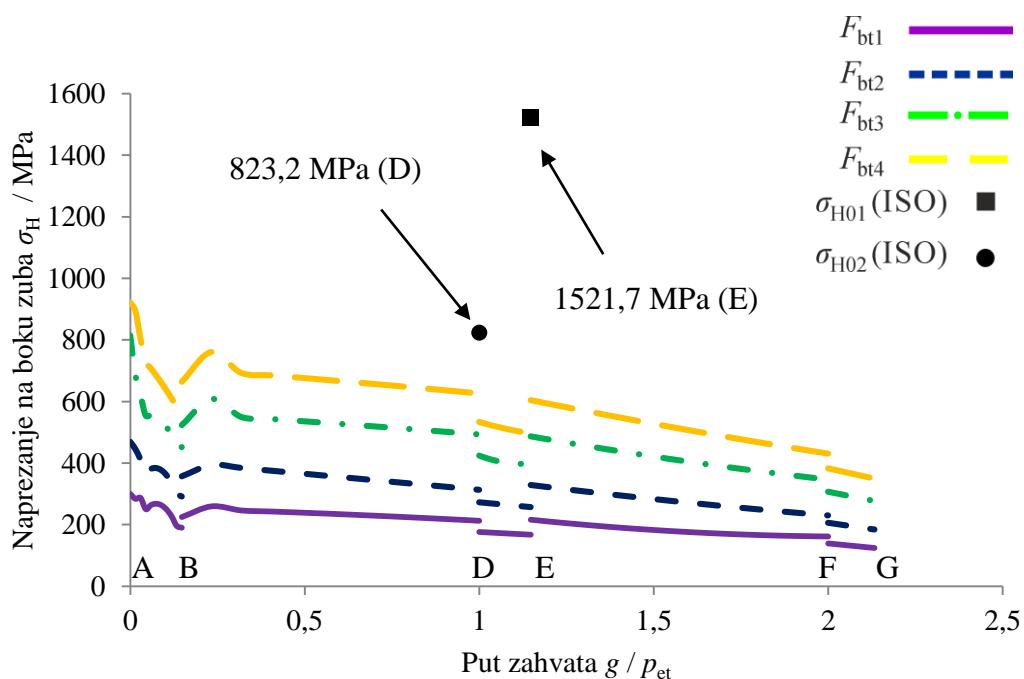
Slika 8.34 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 0

Naprezanje na boku zuba vrlo je visoko u početku zahvata zupčanika (blizina točke A) zbog nepovoljnih uvjeta kontakta (oštri rub glave zuba zupčanika). Nakon toga naprezanje pada u toku prvog trostrukog zahvata te polagano raste prema početku prvog dvostrukog zahvata. U nastavku zahvata vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika kontinuirano pada, uz odgovarajuće skokove na mjestima prijelaza dvostrukog i trostrukog zahvata.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 0 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima te da je dokazana ispravnost provedene analize putem MKE.

Naprezanje na boku zuba zupčanog para izračunato je prema normi ISO 6336 [22] za unutarnje točke dvostrukog zahvata D i E pri djelovanju sile  $F_{bt4}$ . Vrijednost naprezanja na boku zuba oba zupčanika viša je od odgovarajućeg naprezanja izračunatog putem MKE. Vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u točki zahvata E niža je od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točki zahvata A, dok je vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata D niža od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točkama zahvata A i B.

Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 1 prikazano je na slici 8.35.



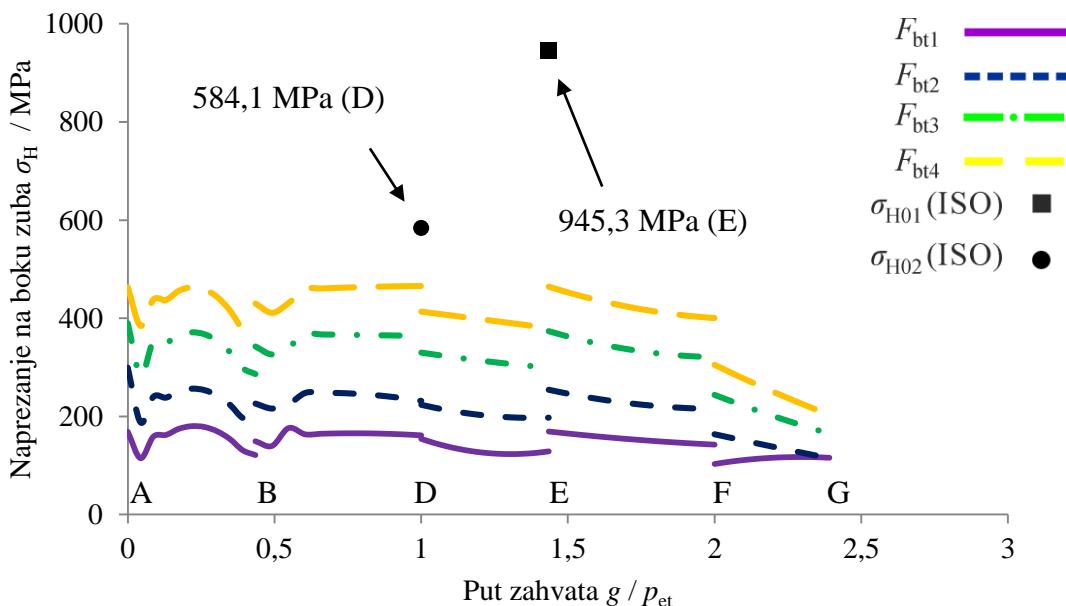
Slika 8.35 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 1

Naprezanje na boku zuba vrlo je visoko na u početku zahvata zupčanika (blizina točke A) zbog nepovoljnih uvjeta kontakta (oštri rub glave zuba zupčanika). Nakon toga naprezanje pada u toku prvog trostrukog zahvata te polagano raste prema početku prvog dvostrukog zahvata, uz skok zbog vrlo kratkog područja dvostrukog zahvata. U nastavku zahvata vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika kontinuirano pada, uz odgovarajuće skokove na mjestima prijelaza dvostrukog i trostrukog zahvata.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 1 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima te da je dokazana ispravnost provedene analize putem MKE.

Naprezanje na boku zuba zupčanog para izračunato je prema normi ISO 6336 [22] za unutarnje točke dvostrukog zahvata D i E pri djelovanju sile  $F_{bt4}$ . Vrijednost naprezanja na boku zuba oba zupčanika viša je od odgovarajućeg naprezanja izračunatog putem MKE. Vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata D niža je od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točki zahvata A, dok je vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u točki zahvata E viša od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točkama zahvata A i B.

Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 2 prikazano je na slici 8.36.



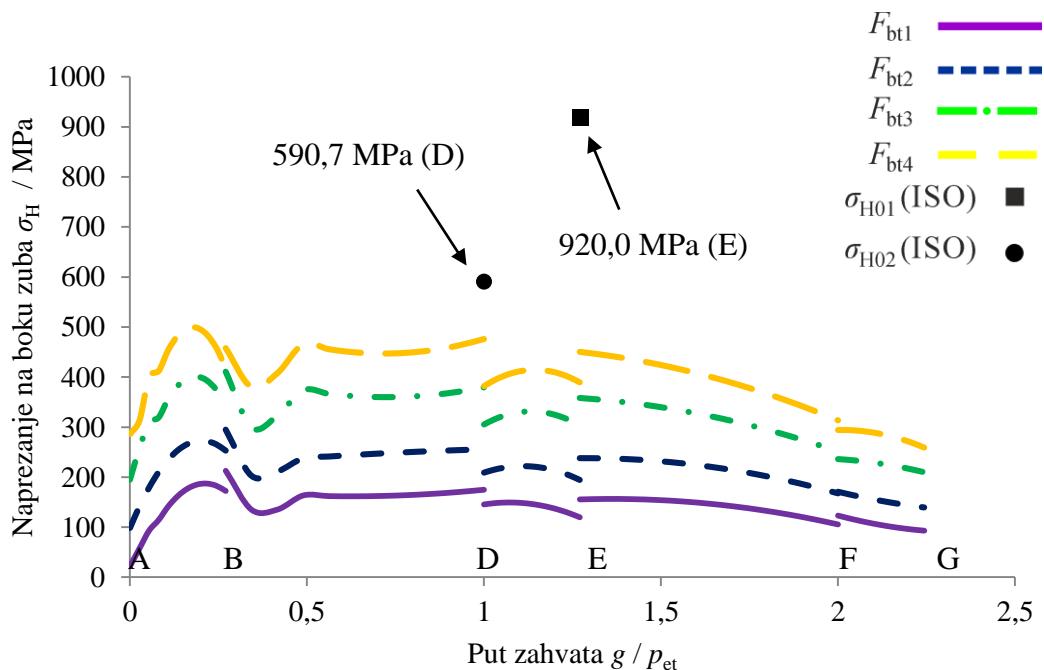
Slika 8.36 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 2

Naprezanje na boku zuba povišeno je na početku zahvata zupčanika (blizina točke A) zbog nepovoljnih uvjeta kontakta (oštri rub glave zuba zupčanika). Nakon toga vrijednost naprezanja pada na najnižu vrijednost za prvi trostruki zahvat pa zatim raste prema kraju prvog trostrukog zahvata. Prelazak u područje prvog dvostrukog zahvata prati skok vrijednosti naprezanja. U nastavku zahvata vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika kontinuirano pada, uz odgovarajuće skokove na mjestima prijelaza dvostrukog i trostrukog zahvata.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 2 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima te da je dokazana ispravnost provedene analize putem MKE.

Naprezanje na boku zuba zupčanog para izračunato je prema normi ISO 6336 [22] za unutarnje točke dvostrukog zahvata D i E pri djelovanju sile  $F_{bt4}$ . Vrijednost naprezanja na boku zuba oba zupčanika viša je od odgovarajućeg naprezanja izračunatog putem MKE. Vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata D i vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u točki zahvata E više su od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točkama zahvata A i B.

Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 3 prikazano je na slici 8.37.



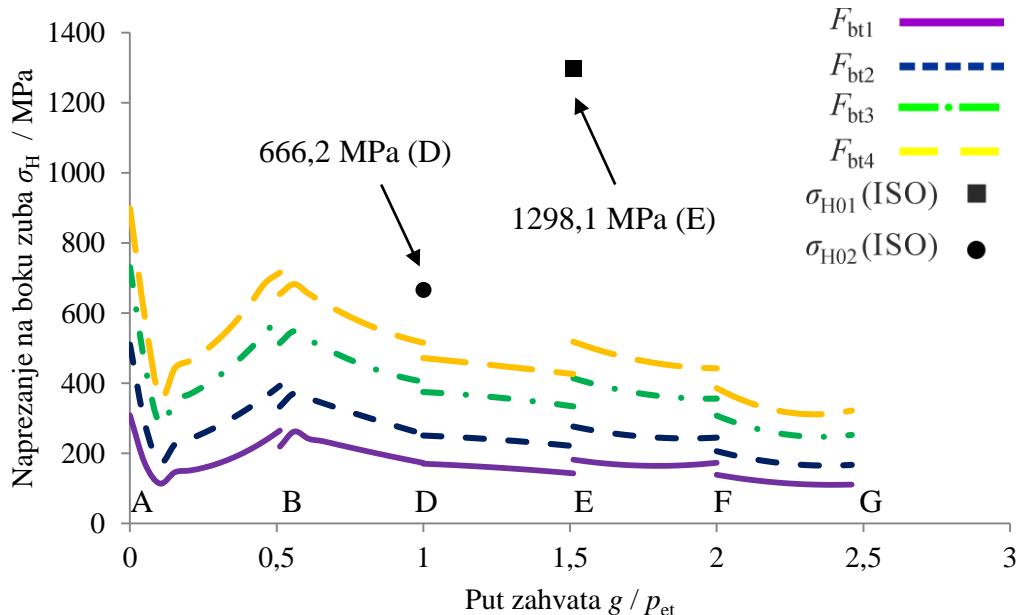
Slika 8.37 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 3

Početno visoko naprezanje na početku zahvata ovdje nije registrirano prilikom FEM analize zbog vrlo kratkog trajanja na samom početku zahvata u blizini točke zahvata A. Vrijednost naprezanja raste do najveće vrijednosti u području prvog trostrukog zahvata, nakon čega pada pa skokovito raste na početku prvog dvostrukog zahvata. U nastavku zahvata vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika kontinuirano pada, uz odgovarajuće skokove na mjestima prijelaza dvostrukog i trostrukog zahvata.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 3 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima te da je dokazana ispravnost provedene analize putem MKE.

Naprezanje na boku zuba zupčanog para izračunato je prema normi ISO 6336 [22] za unutarnje točke dvostrukog zahvata D i E pri djelovanju sile  $F_{bt4}$ . Vrijednost naprezanja na boku zuba oba zupčanika viša je od odgovarajućeg naprezanja izračunatog putem MKE. Vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata D i vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u točki zahvata E više su od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točkama zahvata A i B.

Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 4 prikazano je na slici 8.38.



Slika 8.38 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata para 4

Naprezanje na boku zuba vrlo je visoko na u početku zahvata zupčanika (blizina točke A) zbog nepovoljnih uvjeta kontakta (oštri rub glave zuba zupčanika). Nakon toga naprezanje pada u toku prvog trostrukog zahvata te polagano raste prema početku prvog dvostrukog zahvata. U nastavku zahvata vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika kontinuirano pada, uz odgovarajuće skokove na mjestima prijelaza dvostrukog i trostrukog zahvata.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 4 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima te da je dokazana ispravnost provedene analize putem MKE.

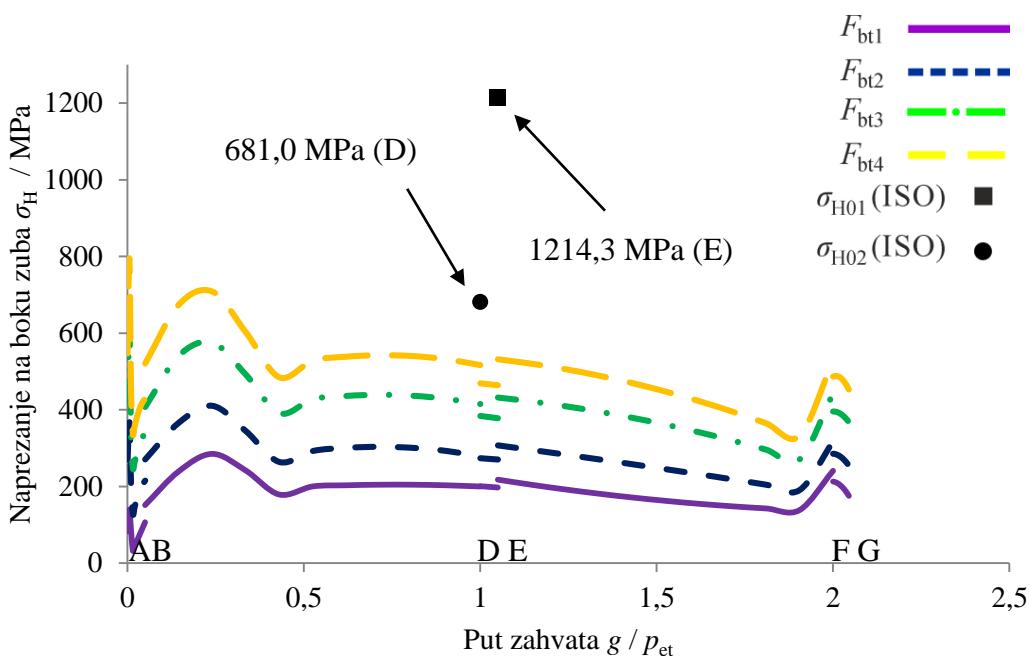
Naprezanje na boku zuba zupčanog para izračunato je prema normi ISO 6336 [22] za unutarnje točke dvostrukog zahvata D i E pri djelovanju sile  $F_{bt4}$ . Vrijednost naprezanja na boku zuba oba zupčanika viša je od odgovarajućeg naprezanja izračunatog putem MKE. Vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata D niža je od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točki zahvata A, dok je vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u točki zahvata E viša od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točkama zahvata A i B.

Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 5 prikazano je na slici 8.39.

Naprezanje na boku zuba najviše je na početku zahvata zupčanika (blizina točke A) zbog nepovoljnih uvjeta kontakta (oštri rub glave zuba velikog zupčanika). Nakon toga naprezanje pada u toku prvog trostrukog zahvata te polagano raste prema početku prvog dvostrukog zahvata. Stupanj prekrivanja ovog zupčanog para blizak je 2 ( $\varepsilon_a = 2,05$ ), zbog čega su područja trostrukog zahvata vrlo kratka te se porast naprezanja nalazi u na početku prvog područja dvostrukog zahvata. U nastavku naprezanje kontinuirano pada kroz cijeli zahvat, sve do porasta pred točkom zahvata F i konačnog pada u točki G, što je uzrokovano nepovoljnim uvjetima kontakta (oštri rub glave zuba malog zupčanika).

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 5 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima te da je dokazana ispravnost provedene analize putem MKE.

Naprezanje na boku zuba zupčanog para izračunato je prema normi ISO 6336 [22] za unutarnje točke dvostrukog zahvata D i E pri djelovanju sile  $F_{bt4}$ . Vrijednost naprezanja na boku zuba oba zupčanika viša je od odgovarajućeg naprezanja izračunatog putem MKE.



Slika 8.39 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 5

Vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata D niža je od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točkama zahvata A i B, dok je vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u točki zahvata E viša od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točkama zahvata A i B.

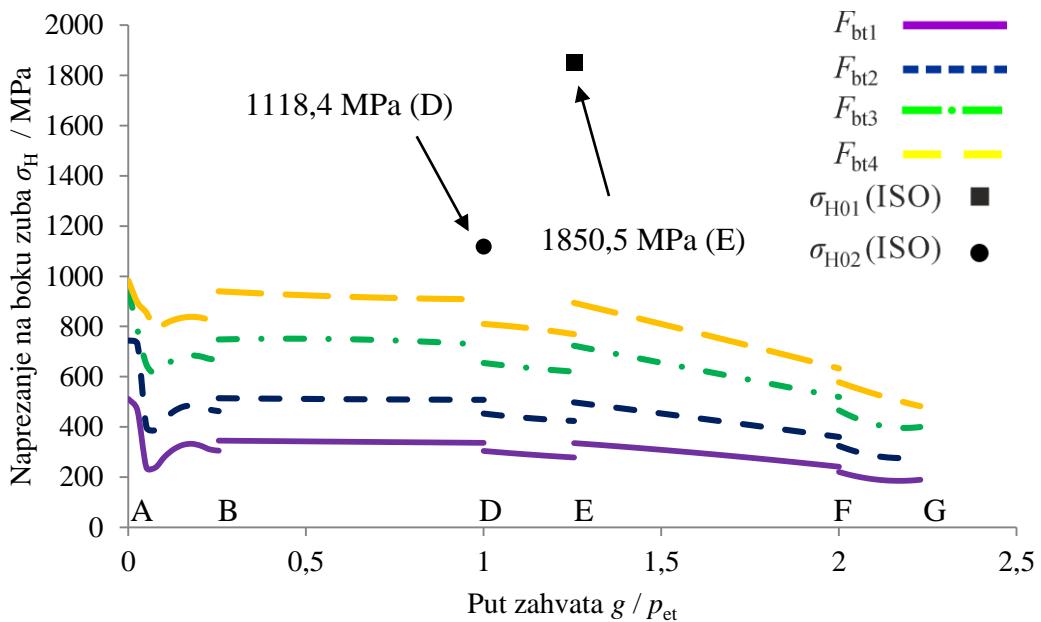
Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 6 prikazano je na slici 8.40.

Naprezanje na boku zuba vrlo je visoko u početku zahvata zupčanika (blizina točke A) zbog nepovoljnih uvjeta kontakta (oštri rub glave zuba zupčanika). Nakon toga naprezanje pada u toku prvog trostrukog zahvata te polagano raste prema početku prvog dvostrukog zahvata. U nastavku zahvata vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika kontinuirano pada, uz odgovarajuće skokove na mjestima prijelaza dvostrukog i trostrukog zahvata.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 6 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima te da je dokazana ispravnost provedene analize putem MKE.

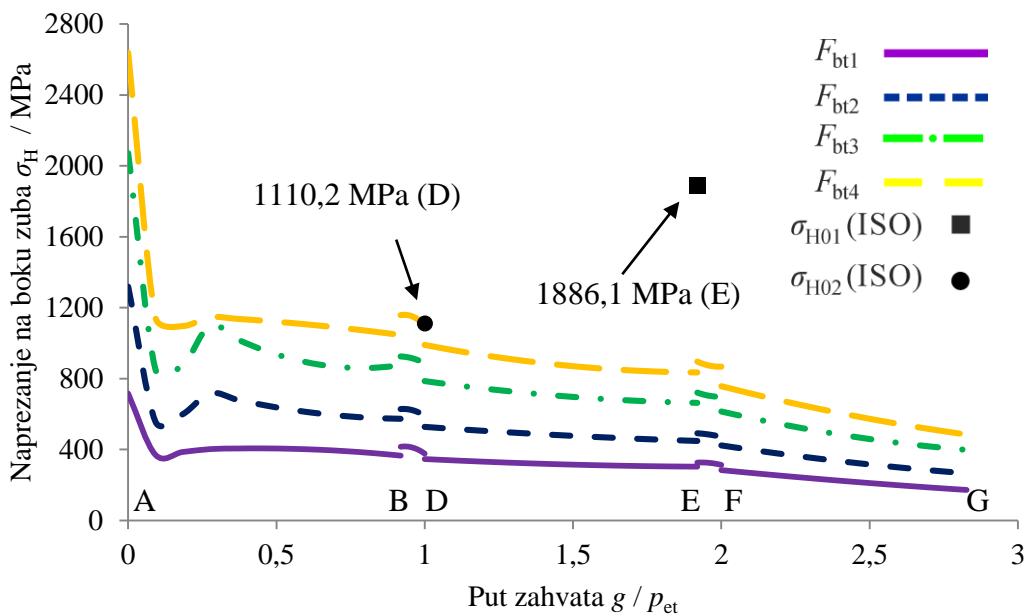
Naprezanje na boku zuba zupčanog para izračunato je prema normi ISO 6336 [22] za unutarnje točke dvostrukog zahvata D i E pri djelovanju sile  $F_{bt4}$ . Vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata D i vrijednost naprezanja na

boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u točki zahvata E više su od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točkama zahvata A i B izračunatog putem MKE.



Slika 8.40 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 6

Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 7 prikazano je na slici 8.41.



Slika 8.41 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 7

Naprezanje na boku zuba vrlo je visoko u početku zahvata zupčanika (blizina točke A) zbog nepovoljnih uvjeta kontakta (oštri rub glave zuba zupčanika). Nakon toga naprezanje prvo naglo pada u toku prvog trostrukog zahvata, a zatim slijedi polagani pad prema početku prvog dvostrukog zahvata. U nastavku zahvata vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika kontinuirano pada, uz odgovarajuće skokove na mjestima prijelaza dvostrukog i trostrukog zahvata. Razdoblja trostrukog zahvata vrlo su duga zbog stupnja prekrivanja  $\varepsilon_a$  bliskog 3 ( $\varepsilon_a = 2,919$ ).

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 7 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima te da je dokazana ispravnost provedene analize putem MKE.

Naprezanje na boku zuba zupčanog para izračunato je prema normi ISO 6336 [22] za unutarnje točke dvostrukog zahvata D i E pri djelovanju sile  $F_{bt4}$ . Vrijednost naprezanja na boku zuba oba zupčanika niža je od odgovarajućeg naprezanja izračunatog putem MKE u točki zahvata A. Vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u točki zahvata E veća je od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točki zahvata B prema MKE, dok je vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata D manja.

Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 8 prikazano je na slici 8.42.

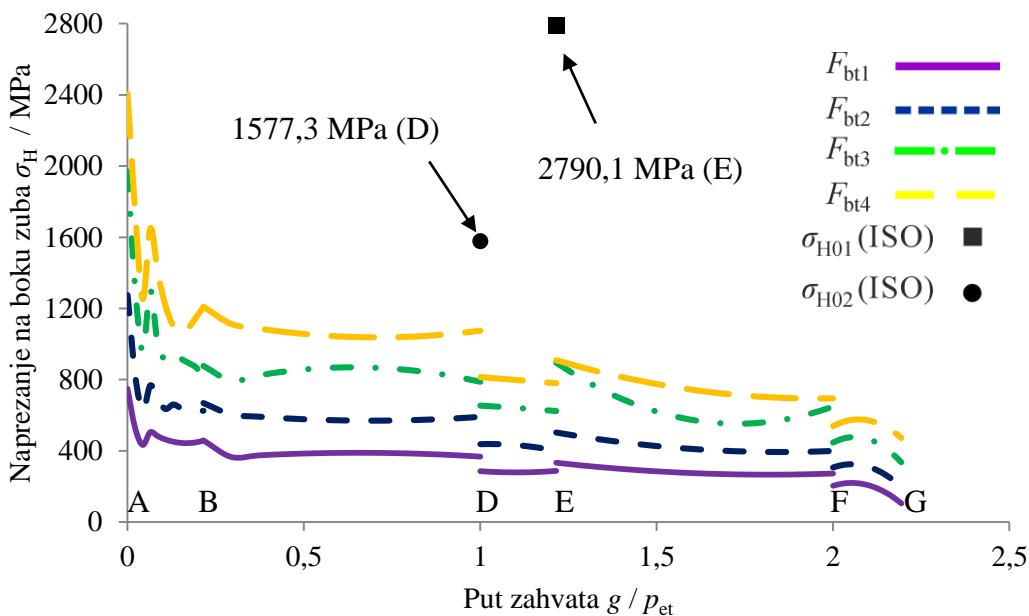
Naprezanje na boku zuba vrlo je visoko u početku zahvata zupčanika (blizina točke A) zbog nepovoljnih uvjeta kontakta (oštri rub glave zuba zupčanika).

Nakon toga naprezanje naglo pada u toku prvog trostrukog zahvata te nakratko skače u prvom području trostrukog zahvata te se smanjuje prema početku prvog dvostrukog zahvata. S te razine polagano pada prema završetku zahvatnog puta, uz skokove na prijelazima dvostrukog i trostrukog zahvata. Izraženi skok vrijednosti naprezanja na prelasku iz prvog trostrukog u prvi dvostruki zahvat vjerojatno je posljedica razlike u zakriviljenosti bokova zupčanika.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 8 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima te da je dokazana ispravnost provedene analize putem MKE.

Naprezanje na boku zuba zupčanog para izračunato je prema normi ISO 6336 [22] za unutarnje točke dvostrukog zahvata D i E pri djelovanju sile  $F_{bt4}$ . Vrijednost naprezanja na

boku zuba oba zupčanika viša je od odgovarajućeg naprezanja izračunatog putem MKE. Vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u točki zahvata E i vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata D više su od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točkama zahvata A i B.



Slika 8.42 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 8

Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 9 prikazano je na slici 8.43.

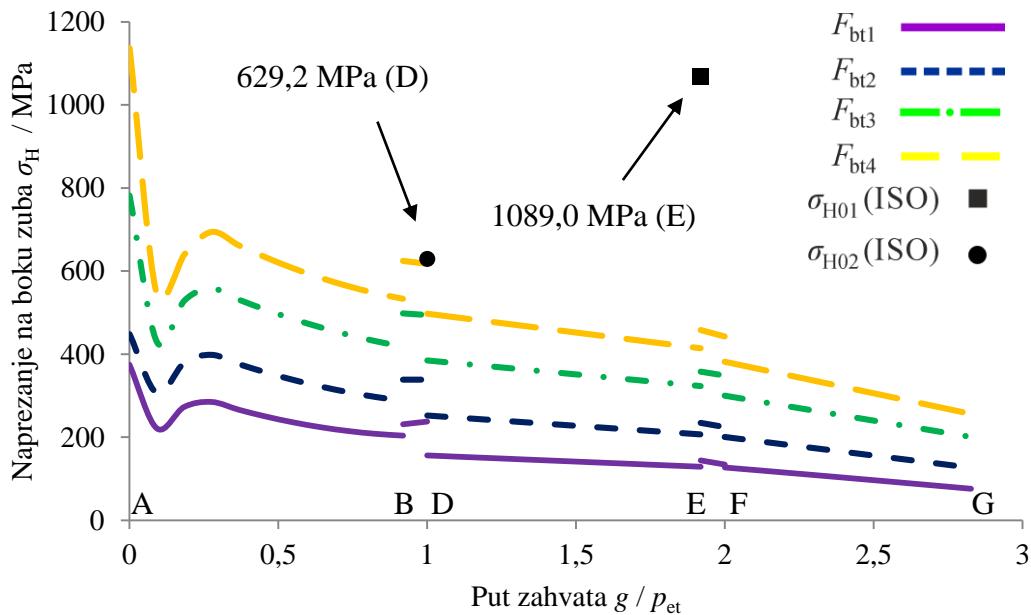
Naprezanje na boku zuba vrlo je visoko u početku zahvata zupčanika (blizina točke A) zbog nepovoljnih uvjeta kontakta (oštri rub glave zuba zupčanika).

Nakon toga naprezanje naglo pada u toku prvog trostrukog zahvata te se nakon kratkog skoka ustaljuje na razini s koje polagano pada prema završetku zahvatnog puta, uz skokove na područjima dvostrukog zahvata. Stupanj prekrivanja vrlo je blizu 3 ( $\varepsilon_a = 2,919$ ), zbog čega su razdoblja trostrukog zahvata vrlo duga.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 9 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima te da je dokazana ispravnost provedene analize putem MKE.

Naprezanje na boku zuba zupčanog para izračunato je prema normi ISO 6336 [22] za unutarnje točke dvostrukog zahvata D i E pri djelovanju sile  $F_{bt4}$ . Vrijednost naprezanja na

boku zuba oba zupčanika niža je od odgovarajućeg naprezanja izračunatog putem MKE u točki zahvata A. Vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u točki zahvata E i vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata D veće su od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točki zahvata B prema MKE.



Slika 8.43 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 9

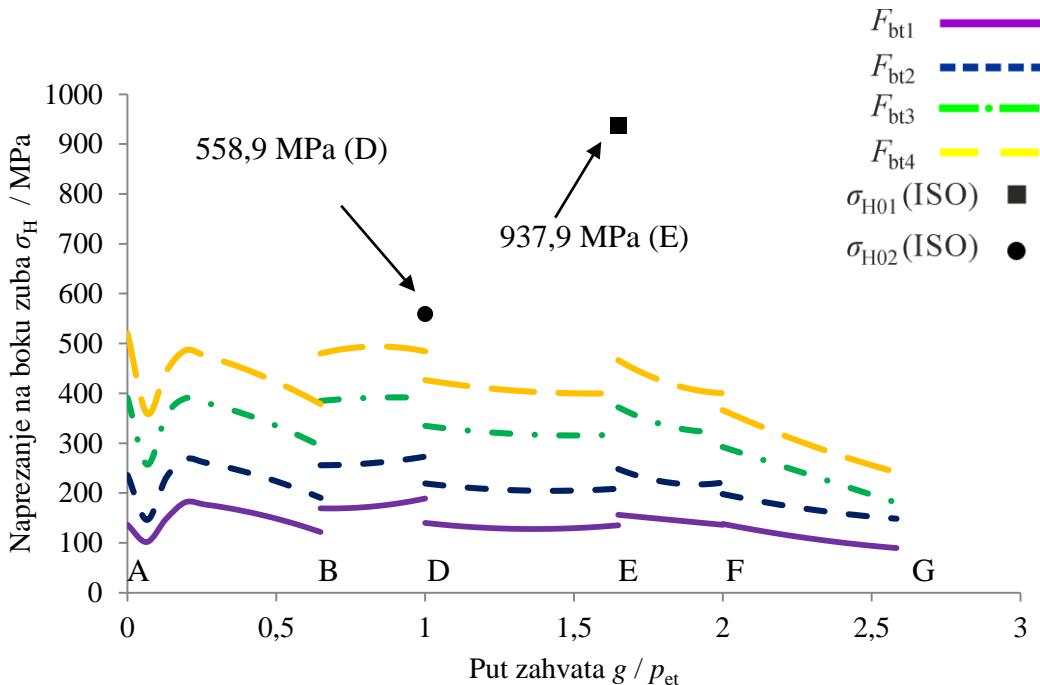
Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 10 prikazano je na slici 8.44.

Izraženo visoka vrijednost naprezanja na boku zuba u početku zahvata zupčanika (blizina točke A) zbog nepovoljnih uvjeta kontakta (oštri rub glave zuba zupčanika) nije uočena. Vrijednost naprezanja naglo pada do lokalnog minimuma u toku prvog trostrukog zahvata te ponovno raste, nakon čega kontinuirano pada tijekom zahvatnog puta, uz skokove na područjima dvostrukog zahvata. Razdoblja trostrukog zahvata vrlo su duga zbog stupnja prekrivanja bliskog 3.

Analizom vrijednosti naprezanja tijekom zahvata zupčanog para 10 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene putem MKE proporcionalne veličini ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u svim slučajevima te da je dokazana ispravnost provedene analize putem MKE.

Naprezanje na boku zuba zupčanog para izračunato je prema normi ISO 6336 [22] za unutarnje točke dvostrukog zahvata D i E pri djelovanju sile  $F_{bt4}$ .

Vrijednost naprezanja na boku zuba oba zupčanika viša je od odgovarajućeg naprezanja izračunatog putem MKE. Vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata D i vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u točki zahvata E više su od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u točkama zahvata A i B.



Slika 8.45 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 10

Rezultati analize naprezanja na boku zuba zupčanika u tijeku zahvata zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem u skladu su s rezultatima iz [28] i [60].

Analizom promjene vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem utvrđeno je da se najveće vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika pojavljuju u područjima prvog trostrukog i prvog dvostrukog zahvata. To znači da se najveće naprezanje na boku zuba zupčanika ne pojavljuje u točki zahvata D za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem te u točki E za zupčanik s vanjskim ozubljenjem, kako je navedeno u normi ISO 6336 [22].

Najveća vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika UVPP zupčanih parova očekivano se pojavljuje u točki zahvata A, zbog kontakta oštrog ruba glave zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem i boka zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem. U zahvatu se pojavljuje i još

jedan lokalni maksimum vrijednosti naprezanja u blizini točke zahvata B. Ovisno o veličini stupnja prekrivanja  $\varepsilon_a$ , taj lokalni maksimum nalazit će se u području prvog trostrukog zahvata A – B u slučajevima kada je stupanj prekrivanja  $\varepsilon_a$  bliži 3, dok će se u slučajevima kada je stupanj prekrivanja  $\varepsilon_a$  bliži 2 nalaziti u prvom području dvostrukog zahvata B – D.

Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem prema normi ISO 6336 [22] računaju se uvijek uz punu vrijednost ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ , čak i kod VPP/UVPP zupčanih parova. Tako dobivene vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem i na boku zupčanika s unutarnjim ozubljenjem veće su od vrijednosti dobivenih putem MKE za istu točku zahvata. Obje vrijednosti mogu biti manje ili veće od maksimuma u točki zahvata A ili lokalnog maksimuma u blizini točke zahvata B.

Na temelju navedenoga može se zaključiti da je potvrđeno da proračun vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema normi [22] nije potpuno točan, zbog čega je potrebno primijeniti točniji postupak proračuna.

Rezultati dobiveni takvim postupkom proračuna prema [24], [44] prikazani su u poglavlju 8.6.

## **8.5 Usporedba vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem dobivenih putem metoda prikazanih u ovom radu**

Prilikom analize raspodjele sile tijekom zahvata zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem prikazane u poglavlju 8.2 te analize naprezanja na boku i u korijenu zuba zupčanika zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem prikazane u poglavljima 8.3 i 8.4 ustanovljeno je da se potpuna slika raspodjele sile i naprezanja tijekom zahvata zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem postiže prilikom djelovanja najveće ukupne sile na zahvatnoj liniji.

Zbog toga su uspoređene vrijednosti naprezanja u slučaju djelovanja najveće sile  $F_{bt4}$ . Vrijednosti dobivene analizom putem MKE uspoređene su s rezultatima dobivenim putem metode izložene u [49], [48], [52] uz hipotetsku raspodjelu sile i uz raspodjelu sile dobivenu analizom putem MKE te sa vrijednostima proračunatim prema normi ISO 6336 [22].

Proračun svih vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika u ovom poglavlju proveden je pomoću softvera ZupcanikUVPP, razvijenog tijekom istraživanja u ovom radu.

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika proračunate prema normi ISO 6336 [22] bitno su veće od ostalih vrijednosti i zbog toga prikazane izvan mjerila.

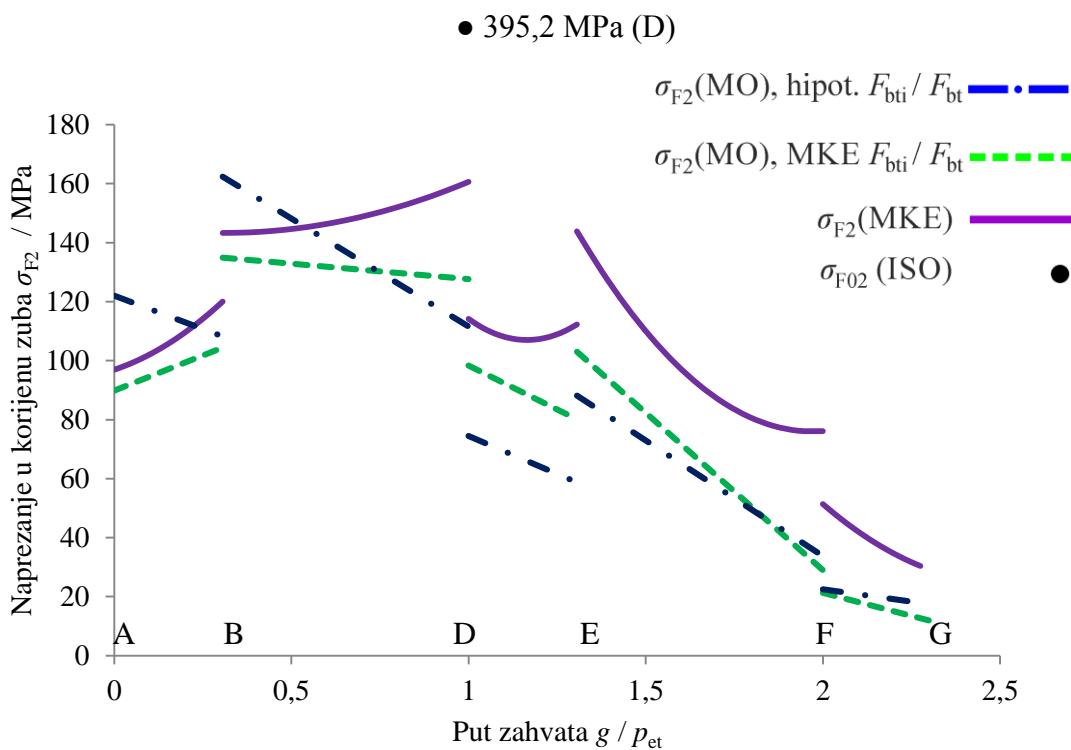
Metoda proračuna naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem izložena u [49], [48], [52] označena je s MO zbog jednostavnosti prikaza.

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 0 prikazane su na slici 8.46.

Uspoređivanjem vrijednosti naprezanja utvrđeno je da se primjenom proračuna prema MO uz hipotetsku raspodjelu sile dobiva vršna vrijednost naprezanja koja je veća od najveće vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE te se pojavljuje u drugoj točki zahvata.

Vrijednosti naprezanja dobivene proračunom prema MO uz raspodjelu sile u tijeku zahvata dobivenu putem MKE prate kretanje trenda vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE, no uz nešto niže vrijednosti. Odstupanje se javlja u području prvog dvostrukog zahvata B-D gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima maksimum u točki zahvata D, dok vrijednost naprezanja prema MO uz raspodjelu sile prema MKE ima maksimum u točki zahvata B.

Odstupanje također postoji u području drugog trostrukog zahvata, gdje vrijednost naprezanja prema MKE raste od točke zahvata D prema točki zahvata E, dok vrijednost naprezanja prema MO uz MKE raspodjelu sile pada od točke zahvata D prema točki zahvata E.

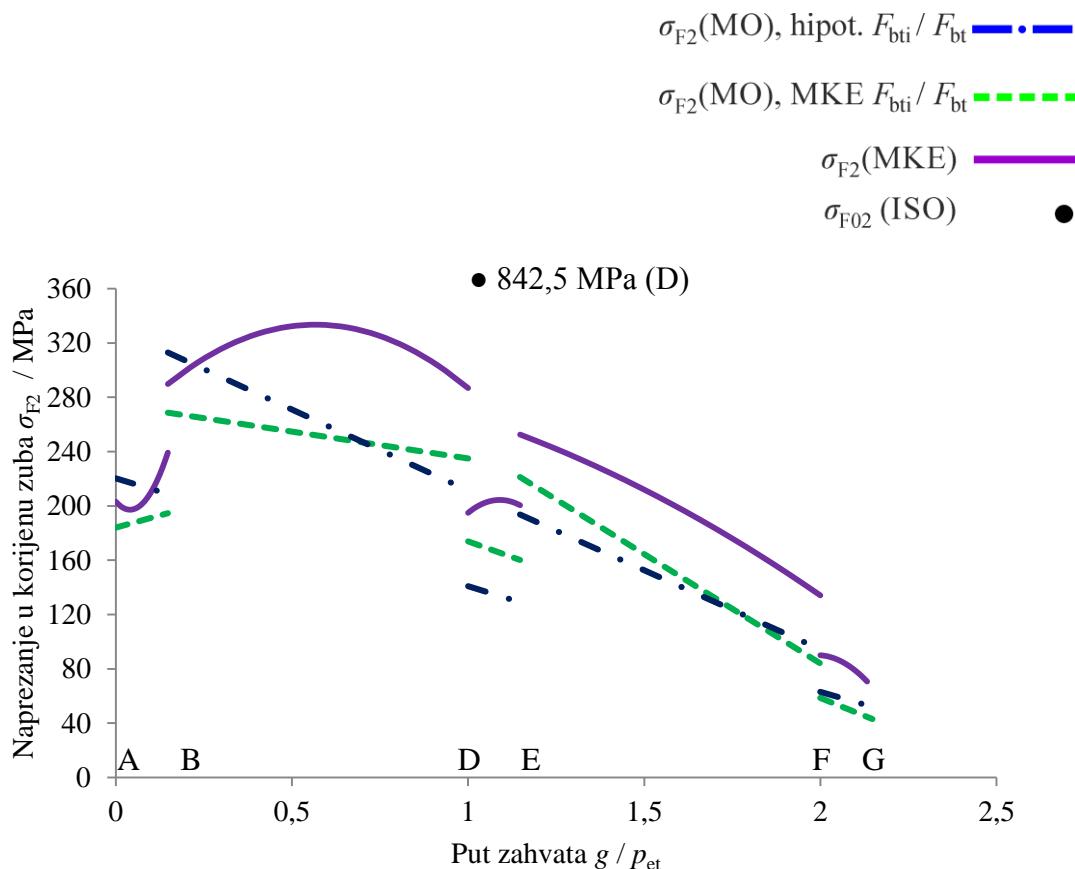


Slika 8.46 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 0

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 1 prikazane su na slici 8.47.

Uspoređivanjem vrijednosti naprezanja utvrđeno je da se primjenom proračuna prema MO uz hipotetsku raspodjelu sile dobiva vršna vrijednost naprezanja koja je manja od vršne vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE te se pojavljuje u drugoj točki zahvata.

Vrijednosti naprezanja dobivene proračunom prema MO uz raspodjelu sile u tijeku zahvata dobivenu putem MKE prate kretanje trenda vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE, no uz nešto niže vrijednosti. Odstupanje se javlja u području prvog dvostrukog zahvata B-D gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima maksimum u točki na polovici područja zahvata, dok vrijednost naprezanja prema MO uz raspodjelu sile prema MKE ima maksimum u točki zahvata B. Odstupanje također postoji u području drugog trostrukog zahvata, gdje vrijednost naprezanja prema MKE raste od točke zahvata D prema točki zahvata E, dok vrijednost naprezanja prema MO uz MKE raspodjelu sile pada od točke zahvata D prema točki zahvata E.

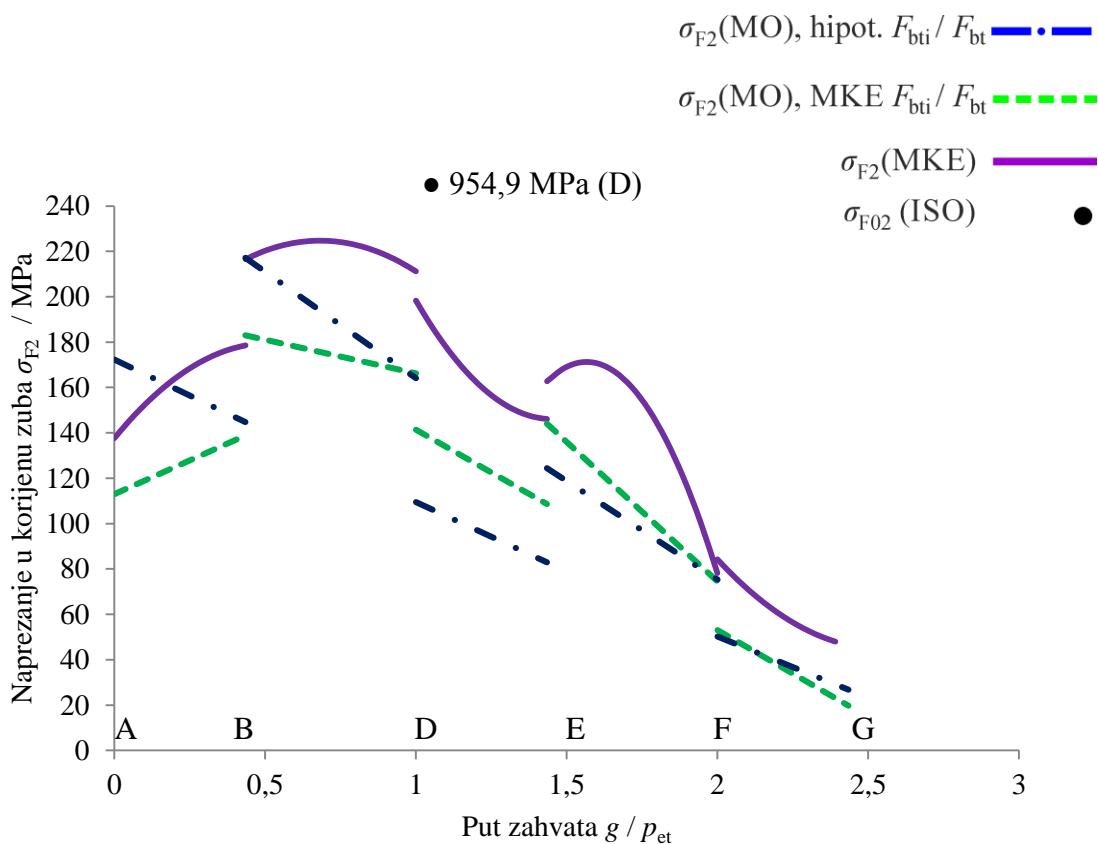


Slika 8.47 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 1

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 2 prikazane su na slici 8.48.

Uspoređivanjem vrijednosti naprezanja utvrđeno je da se primjenom proračuna prema MO uz hipotetsku raspodjelu sile dobiva vršna vrijednost naprezanja koja je manja od najveće vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE te se pojavljuje u drugoj točki zahvata.

Vrijednosti naprezanja dobivene proračunom prema MO uz raspodjelu sile u tijeku zahvata dobivenu putem MKE prate kretanje trenda vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE, no uz nešto niže vrijednosti. Odstupanje se javlja u području prvog dvostrukog zahvata B-D gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima maksimum u točki na polovici područja zahvata, dok vrijednost naprezanja prema MO uz raspodjelu sile prema MKE ima maksimum u točki zahvata B. Odstupanje također postoji u području drugog dvostrukog zahvata, gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima izražen lokalni maksimum u blizini točke zahvata E.

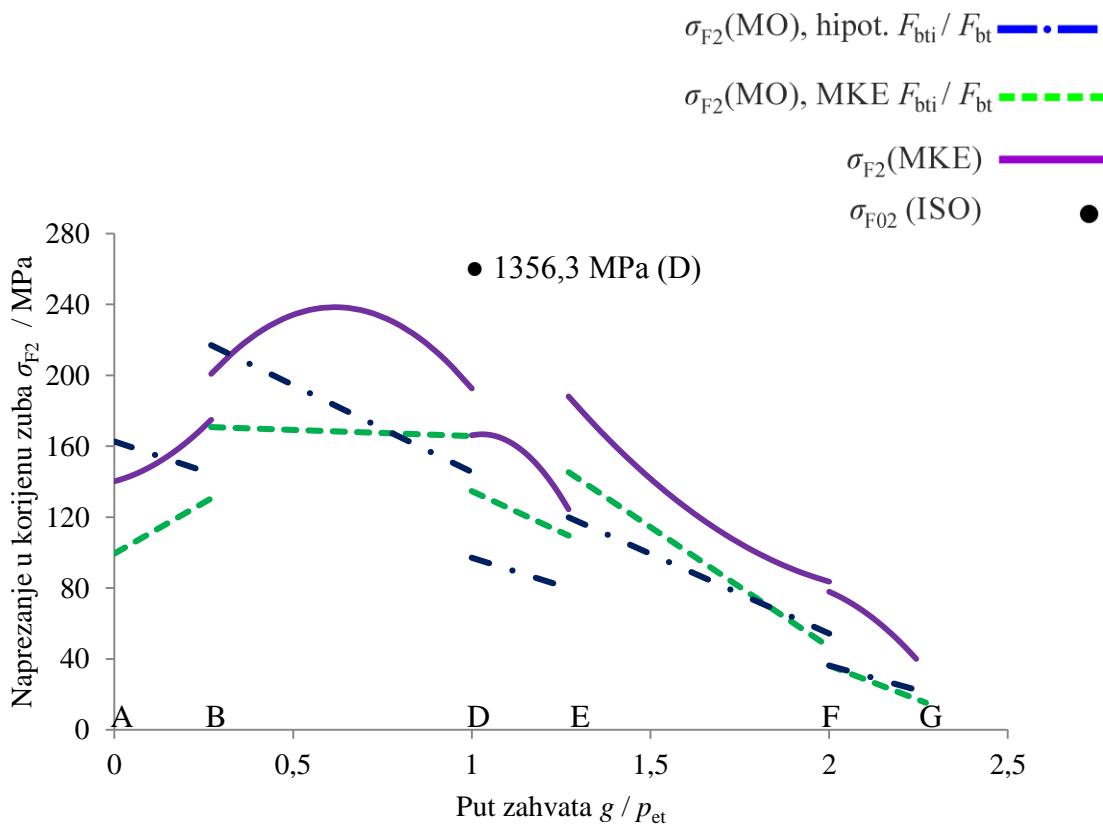


Slika 8.48 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 2

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 3 prikazane su na slici 8.49.

Uspoređivanjem vrijednosti naprezanja utvrđeno je da se primjenom proračuna prema MO uz hipotetsku raspodjelu sile dobiva vršna vrijednost naprezanja koja je manja od najveće vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE te se pojavljuje u drugoj točki zahvata.

Vrijednosti naprezanja dobivene proračunom prema MO uz raspodjelu sile u tijeku zahvata dobivenu putem MKE prate kretanje trenda vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE, no uz nešto niže vrijednosti. Odstupanje se javlja u području prvog dvostrukog zahvata B-D gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima maksimum u točki na polovici područja zahvata, dok vrijednost naprezanja prema MO uz raspodjelu sile prema MKE ima maksimum u točki zahvata B. Odstupanje također postoji u području drugog trostrukog zahvata, gdje vrijednost naprezanja prema MKE raste od točke zahvata D prema točki zahvata E, dok vrijednost naprezanja prema MO uz MKE raspodjelu sile pada od točke zahvata D prema točki zahvata E.



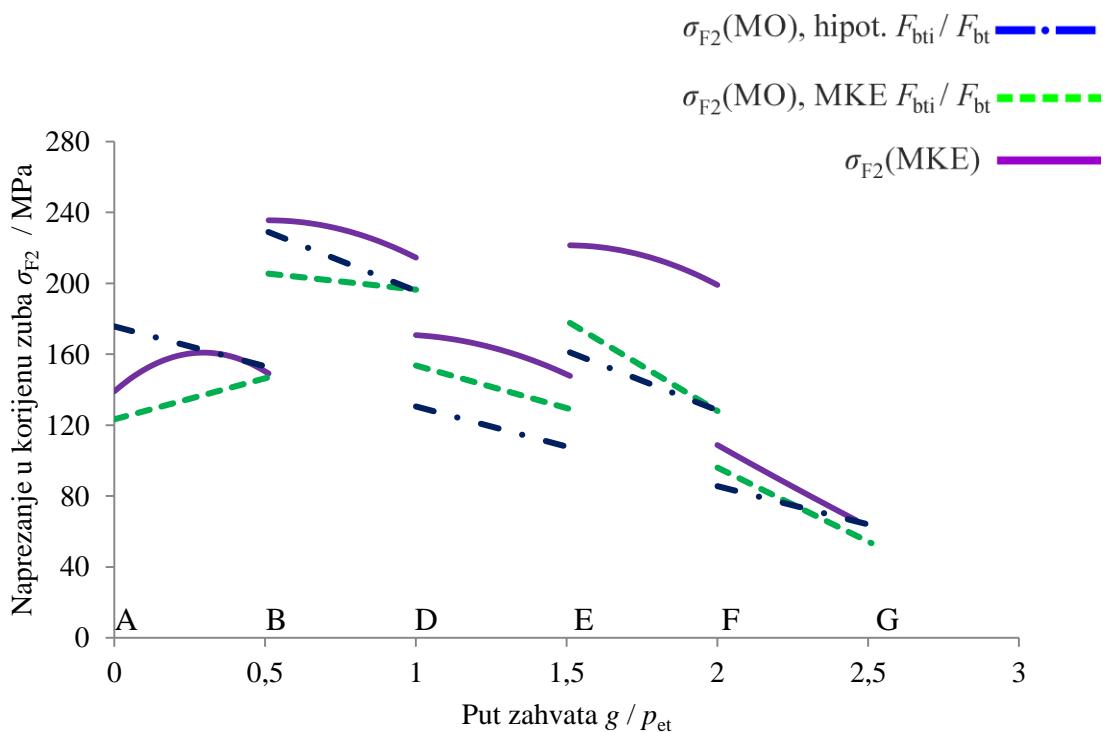
Slika 8.49 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 3

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 4 prikazane su na slici 8.50.

Vrijednost naprezanja prema normi ISO 6336 [22] nije prikazana budući da nije moguće izračunati vrijednost faktora oblika zuba  $Y_F$  za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem za  $\alpha = 14^\circ$ . Područja dvostrukog i trostrukog zahvata vrlo su jednoliko raspoređena zbog stupnja prekrivanja profila  $\varepsilon_\alpha \approx 2,5$ .

Uspoređivanjem vrijednosti naprezanja utvrđeno je da se primjenom proračuna prema MO uz hipotetsku raspodjelu sile dobiva vršna vrijednost naprezanja koja je manja od najveće vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE te se pojavljuje u istoj točki zahvata.

Vrijednosti naprezanja dobivene proračunom prema MO uz raspodjelu sile u tijeku zahvata dobivenu putem MKE prate kretanje trenda vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE, no uz nešto niže vrijednosti. Odstupanje se javlja u području prvog trostrukog zahvata B-D gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima lokalni maksimum u točki na polovici područja zahvata, dok vrijednost naprezanja prema MO uz raspodjelu sile prema MKE ima maksimum u točki zahvata B.



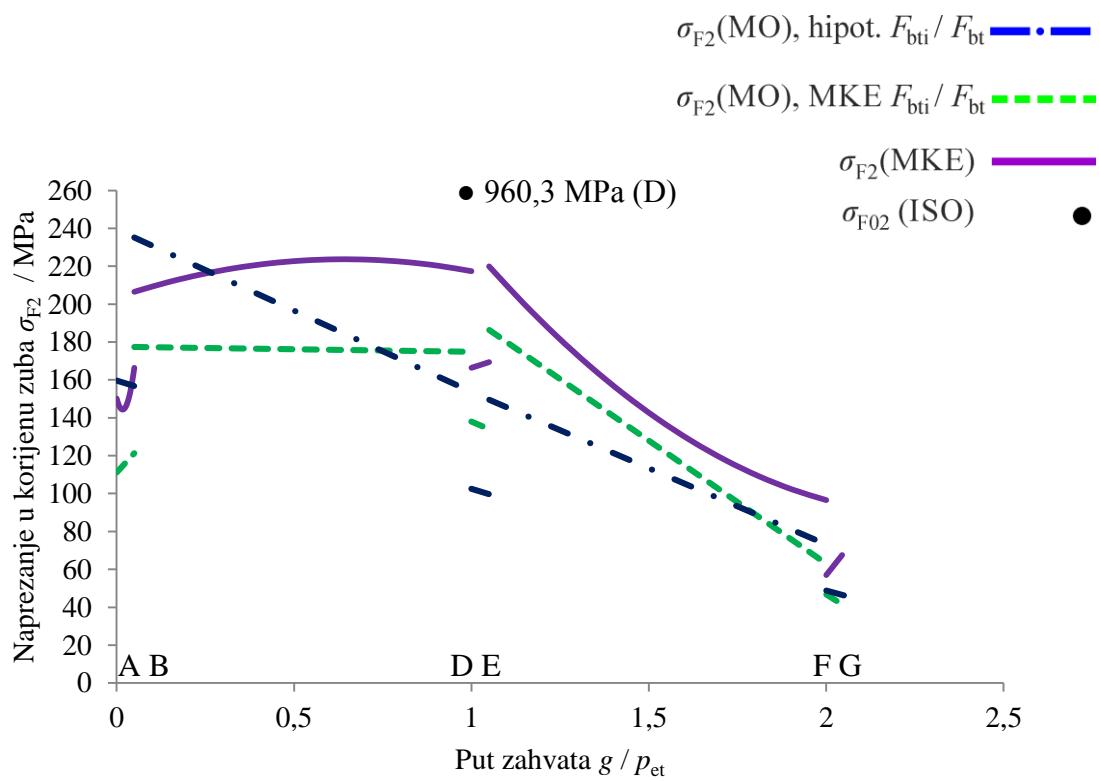
Slika 8.50 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 4

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 5 prikazane su na slici 8.51.

Kod ovog zupčanog para prisutna su duga područja dvostrukog zahvata, što odgovara  $\varepsilon_a \approx 2$ . Uspoređivanjem vrijednosti naprezanja utvrđeno je da se primjenom proračuna prema MO uz hipotetsku raspodjelu sile dobiva vršna vrijednost naprezanja koja je veća od najveće vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE te se pojavljuje u drugoj točki zahvata.

Vrijednosti naprezanja dobivene proračunom prema MO uz raspodjelu sile u tijeku zahvata dobivenu putem MKE prate kretanje trenda vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE, no uz nešto niže vrijednosti. Odstupanje se javlja u području prvog dvostrukog zahvata B-D gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima maksimum u točki u blizini točke zahvata D, dok vrijednost naprezanja prema MO uz raspodjelu sile prema MKE ima maksimum u točki zahvata B.

Odstupanje također postoji u području drugog trostrukog zahvata, gdje vrijednost naprezanja prema MKE raste od točke zahvata D prema točki zahvata E, dok vrijednost naprezanja prema MO uz MKE raspodjelu sile pada od točke zahvata D prema točki zahvata E.



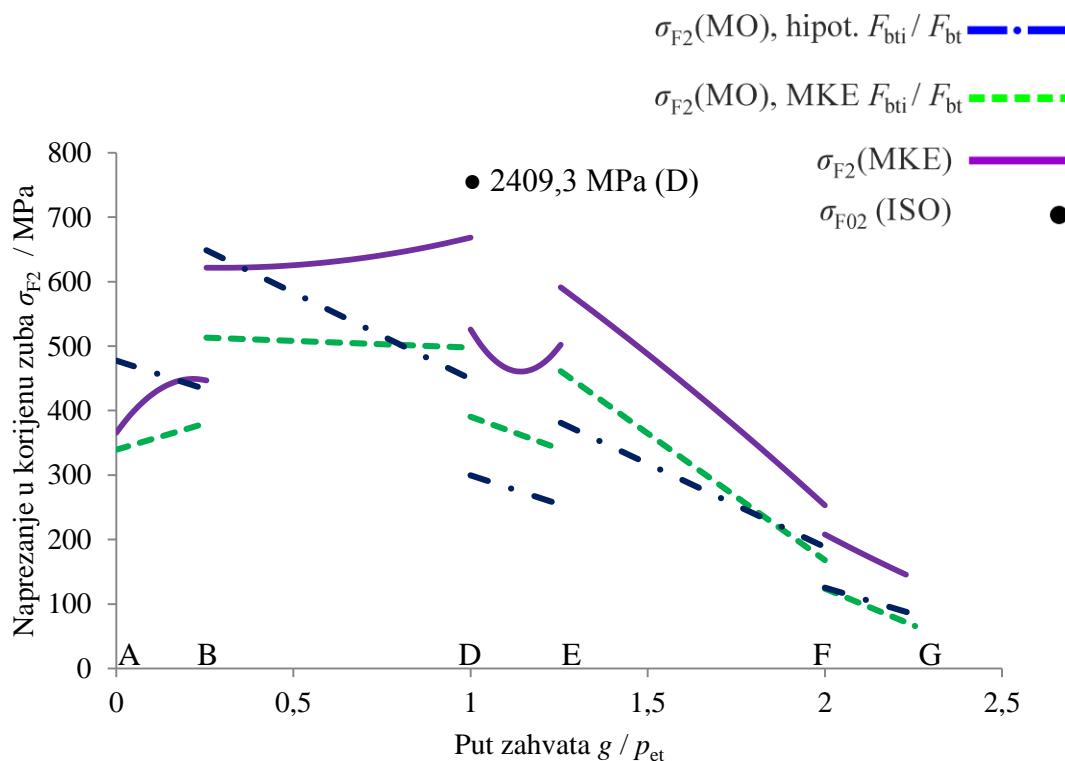
Slika 8.51 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 5

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 6 prikazane su na slici 8.52.

Uspoređivanjem vrijednosti naprezanja utvrđeno je da se primjenom proračuna prema MO uz hipotetsku raspodjelu sile dobiva vršna vrijednost naprezanja koja je manja od najveće vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE te se pojavljuje u drugoj točki zahvata.

Vrijednosti naprezanja dobivene proračunom prema MO uz raspodjelu sile u tijeku zahvata dobivenu putem MKE prate kretanje trenda vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE, no uz nešto niže vrijednosti. Odstupanje se javlja u području prvog dvostrukog zahvata B-D gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima maksimum u točki zahvata D, dok vrijednost naprezanja prema MO uz raspodjelu sile prema MKE ima maksimum u točki zahvata B.

Odstupanje također postoji u području drugog trostrukog zahvata, gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima lokalni minimum na sredini područja zahvata.



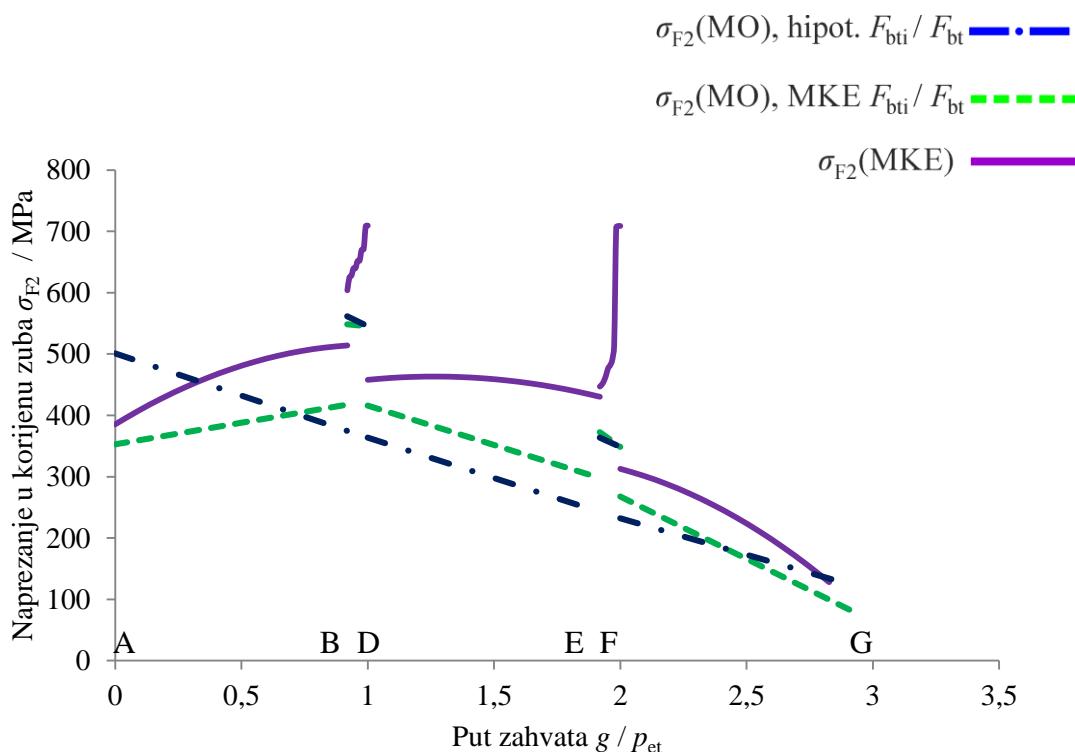
Slika 8.52 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 6

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 7 prikazane su na slici 8.53.

Vrijednost faktora oblika zuba  $Y_F$  za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem pri  $\alpha = 14^\circ$  nije moguće izračunati pa vrijednost naprezanja prema normi ISO 6336 [22] nije prikazana. Vidljiva su duga područja trostrukog zahvata, uz vrlo izražene vršne vrijednosti naprezanja na krajevima kratkih područja dvostrukog zahvata, što odgovara stupnju prekrivanja  $\varepsilon_a \approx 3$ .

Uspoređivanjem vrijednosti naprezanja utvrđeno je da se primjenom proračuna prema MO uz hipotetsku raspodjelu sile dobiva vršna vrijednost naprezanja koja je manja od najveće vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE te se pojavljuje u drugoj točki zahvata.

Vrijednosti naprezanja dobivene proračunom prema MO uz raspodjelu sile u tijeku zahvata dobivenu putem MKE prate kretanje trenda vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE, no uz nešto niže vrijednosti. Odstupanje se javlja u područjima dvostrukog zahvata, gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima vrlo izražene maksimume u točkama zahvata D i F.



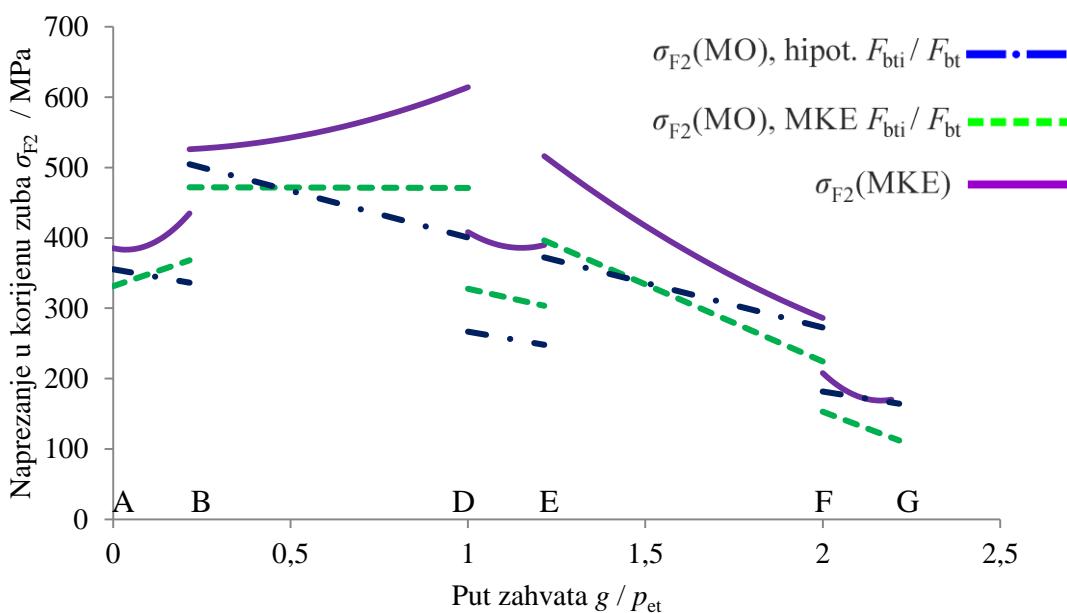
Slika 8.53 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 7

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 8 prikazane su na slici 8.54.

Vrijednost faktora oblika zuba  $Y_F$  za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem pri  $\alpha = 10^\circ$  nije moguće izračunati pa vrijednost naprezanja prema normi ISO 6336 [22] nije prikazana.

Uspoređivanjem vrijednosti naprezanja utvrđeno je da se primjenom proračuna prema MO uz hipotetsku raspodjelu sile dobiva vršna vrijednost naprezanja koja je manja od najveće vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE te se pojavljuje u drugoj točki zahvata.

Vrijednosti naprezanja dobivene proračunom prema MO uz raspodjelu sile u tijeku zahvata dobivenu putem MKE prate kretanje trenda vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE, no uz nešto niže vrijednosti. Odstupanje se javlja u području prvog dvostrukog zahvata B-D gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima maksimum u točki zahvata D, dok vrijednost naprezanja prema MO uz raspodjelu sile prema MKE ima maksimum u točki zahvata B.



Slika 8.54 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 8

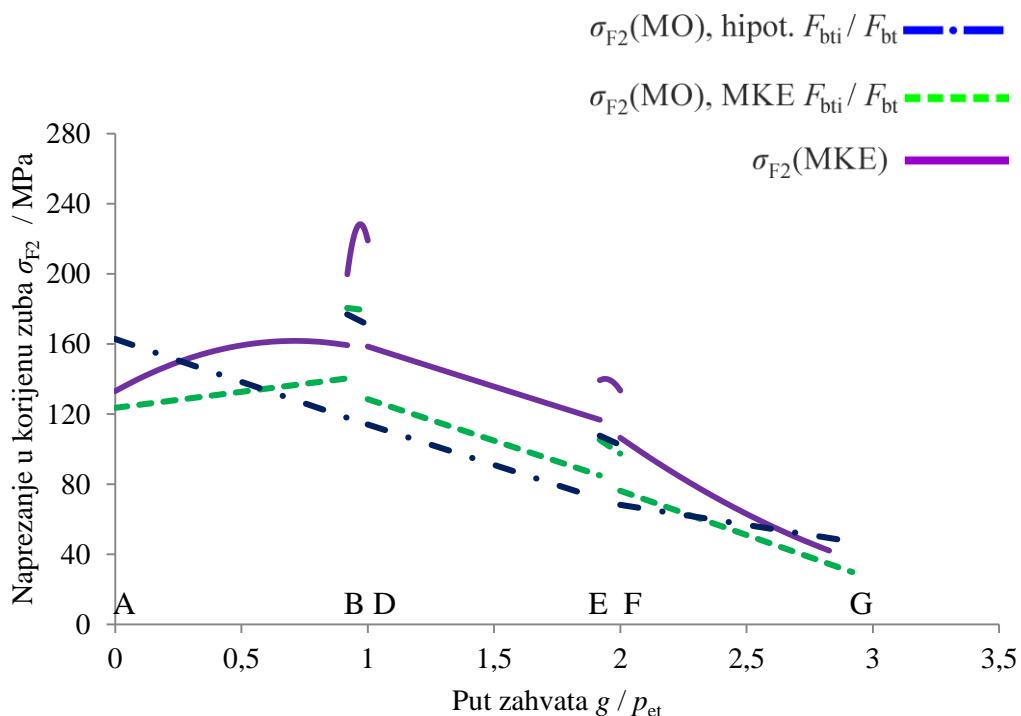
Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 9 prikazane su na slici 8.55.

Vrijednost faktora oblika zuba  $Y_F$  za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem pri  $\alpha = 14^\circ$  nije moguće izračunati pa vrijednost naprezanja prema normi ISO 6336 [22] nije prikazana. Zbog stupnja prekrivanja  $\varepsilon_a \approx 3$  područja trostrukog zahvata vrlo su duga., uz izraženo vršno naprezanje u području prvog dvostrukog zahvata.

Uspoređivanjem vrijednosti naprezanja utvrđeno je da se primjenom proračuna prema MO uz hipotetsku raspodjelu sile dobiva vršna vrijednost naprezanja koja je manja od najveće vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE te se pojavljuje u drugoj točki zahvata.

Vrijednosti naprezanja dobivene proračunom prema MO uz raspodjelu sile u tijeku zahvata dobivenu putem MKE prate kretanje trenda vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE, no uz nešto niže vrijednosti. Odstupanje se javlja u području prvog dvostrukog zahvata B-D gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima izraženi maksimum u točki na polovici područja zahvata, dok vrijednost naprezanja prema MO uz raspodjelu sile prema MKE ima maksimum u točki zahvata B.

Odstupanje također postoji u području prvog trostrukog zahvata, gdje vrijednost naprezanja prema MKE postiže lokalni maksimum u blizini točke zahvata B.



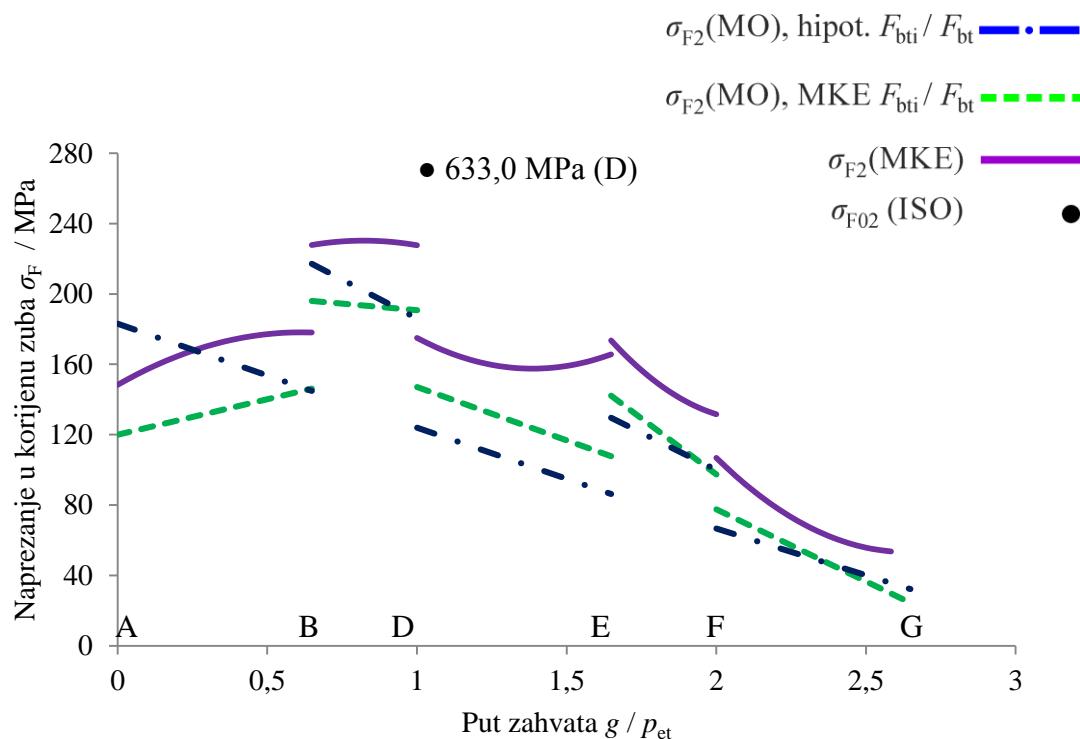
Slika 8.55 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 9

Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 10 prikazane su na slici 8.56.

Uspoređivanjem vrijednosti naprezanja utvrđeno je da se primjenom proračuna prema MO uz hipotetsku raspodjelu sile dobiva vršna vrijednost naprezanja koja je manja od najveće vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE te se pojavljuje u drugoj točki zahvata.

Vrijednosti naprezanja dobivene proračunom prema MO uz raspodjelu sile u tijeku zahvata dobivenu putem MKE prate kretanje trenda vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE, no uz nešto niže vrijednosti. Odstupanje se javlja u području prvog dvostrukog zahvata B-D gdje vrijednost naprezanja prema MKE ima maksimum u točki na polovici područja zahvata, dok vrijednost naprezanja prema MO uz raspodjelu sile prema MKE ima maksimum u točki zahvata B.

Odstupanje također postoji u području drugog trostrukog zahvata, gdje vrijednost naprezanja prema MKE raste od točke zahvata D prema točki zahvata E, dok vrijednost naprezanja prema MO uz MKE raspodjelu sile pada od točke zahvata D prema točki zahvata E.



Slika 8.56 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 10

Analizom vrijednosti naprezanja putem MKE ustanovljeno je da se kod svih zupčanih parova najveće naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem pojavljuje u točki zahvata B, prvom području dvostrukog zahvata B-D ili u točki zahvata D. Najveće naprezanje u korijenu zuba pripadajućeg zupčanika s vanjskim ozubljenjem pojavljuje se u točki zahvata E ili u drugom području dvostrukog zahvata E-F. Zbog toga je analiziran omjer sile  $F_{bt,i}$  i ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u točkama zahvata u kojima se pojavljuje najveća vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. (Tablica 8.4).

Tablica 8.4 Omjer sile  $F_{bt,i}$  i ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  u točkama zahvata u kojima se pojavljuje najveća vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem pri djelovanju najveće sile  $F_{bt4}$

Par	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{F_{bt,i}}{F_{bt}}$	0,59	0,57	0,58	0,61	0,55	0,63	0,60	0,51	0,59	0,53	0,55

Aritmetička sredina vrijednosti  $F_{bt,i} / F_{bt}$  navedenih u tablici 8.4 iznosi  $F_{bt,i} = 0,57 F_{bt}$ , dok najveća vrijednost iznosi  $F_{bt,i} = 0,63 F_{bt}$ . Na temelju te dvije vrijednosti usvojeno je  $F_{bt,i} = 0,6 F_{bt}$ .

Koristeći ovu vrijednost, izračunate su vrijednosti naprezanja (Tablica 8.5) u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema proračunu iz norme [22] ( $\sigma_{F2ISO0,6}$ ) i prema proračunu iz [49], [48], [52] ( $\sigma_{F2MOA0,6}$ ).

Tablica 8.5 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem za različite postupke izračuna pri djelovanju sile  $F_{bt4}$

Par	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_{F2ISO0,6} / \text{MPa}$	237	506	573	814	-	576	1445	-	-	-	380
$\sigma_{F2MOA0,6} / \text{MPa}$	220	396	310	293	316	287	860	902	640	293	330
$\sigma_{F2MKE} / \text{MPa}$	157	333	225	238	236	224	659	707	599	228	230
$\sigma_{F02-ISO} / \text{MPa}$	395	842	955	1356	-	961	2409	-	-	-	633

Vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema proračunu iz [49], [48], [52] izračunata je uz pretpostavku da sila djeluje u točki zahvata A. Vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema ovom postupku

proračuna ovisi o vrijednosti sile  $F_{bt}$  koja djeluje u promatranoj točki zahvata i o udaljenosti te točke zahvata od točke na prijelaznoj krivulji korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zatvara kut od  $45^\circ$  sa simetralom zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. Zbog toga je izabran krak sile koji odgovara točki zahvata A, jer je u toj točki zahvata udaljenost od točke na prijelaznoj krivulji korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u kojoj tangenta na prijelaznu krivulju korijena zatvara kut od  $45^\circ$  sa simetralom zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem najveća [49], [48], [52].

Te vrijednosti prikazane su u usporedbi s maksimalnim vrijednostima naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem dobivenim putem MKE ( $\sigma_{F2MKE}$ ) te vrijednostima izračunatim prema [22] uz puni iznos sile  $F_t$  ( $\sigma_{F02-ISO}$ ).

Na temelju podataka prikazanih u tablici 8.5 zaključeno je da proračun prema [49], [48], [52] uz opterećenje od 0,6  $F_{bt}$  u točki zahvata A daje dovoljno točna rješenja koja pružaju i određeni stupanj sigurnosti. Ova metoda računski je zahtjevna pa je potrebno razmotriti i proračun prema normi [22] uz opterećenje od 0,6  $F_{bt}$ .

Proračun prema normi ISO 6336 [22] uz opterećenje od 0,6  $F_{bt}$  numerički je jednostavniji od proračuna prema [49], [48], [52] i izvediv je bez pomoći računala. Vrijednosti dobivene ovim proračunom bitno su veće od vrijednosti dobivenih proračunom prema [49], [48], [52], a primjena mu je ograničena kod unutarnjeg ozubljenja, budući da izrazi za utjecajne faktore u izrazima za naprezanje u korijenu zuba nisu pouzdani u slučajevima  $\alpha \neq 20^\circ$  [22], a u nekim slučajevima se ne mogu izračunati za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem.

Ova metoda se ipak može primijeniti u slučajevima u kojima je dovoljno procijeniti nosivost korijena zuba zupčanika, ili nije moguće provesti proračun prema [49], [48], [52] zbog numeričke zahtjevnosti metode.

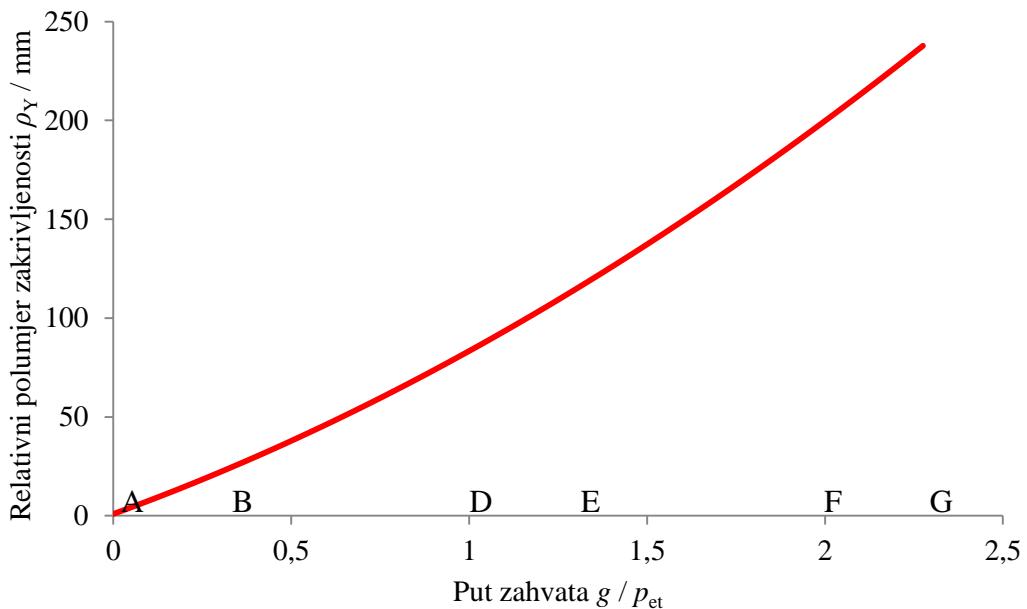
## **8.6 Usporedba vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem dobivenih putem metoda prikazanih u ovom radu**

Prilikom analize raspodjele sile u tijeku zahvata zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem prikazane u poglavljju 8.2 te analize naprezanja na boku i u korijenu zuba zupčanika zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem prikazane u poglavljima 8.3 i 8.4 ustanovljeno je da se potpuna slika raspodjele sile i naprezanja tijekom zahvata zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem postiže prilikom djelovanja najveće ukupne sile na zahvatnoj liniji.

Zbog toga su uspoređene vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u slučaju djelovanja najveće sile  $F_{bt4}$ . Vrijednosti dobivene analizom putem MKE uspoređene su sa rezultatima dobivenim putem metode primijenjene u [35], [44], [73] uz hipotetsku raspodjelu sile i uz raspodjelu sile dobivenu analizom putem MKE te sa vrijednostima proračunatim prema normi ISO 6336 [22].

Proračun svih vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika u ovom poglavlju proveden je pomoću softvera ZupcanikUVPP, razvijenog za potrebe istraživanja provedenih u ovom radu. Za svaki par zupčanika s unutarnjim ozubljenjem dodatno je prikazana i promjena relativnog polumjera zakriviljenosti  $\rho_Y$  u tijeku zahvata. Metoda proračuna naprezanja na boku zuba zupčanika primijenjena u [35], [44], [73] označena je s HZ zbog jednostavnosti prikaza.

Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba tijekom zahvata zupčanog para 0 prikazana je na slici 8.57, dok je promjena naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 0 prikazana na slici 8.58.



Slika 8.57 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 0

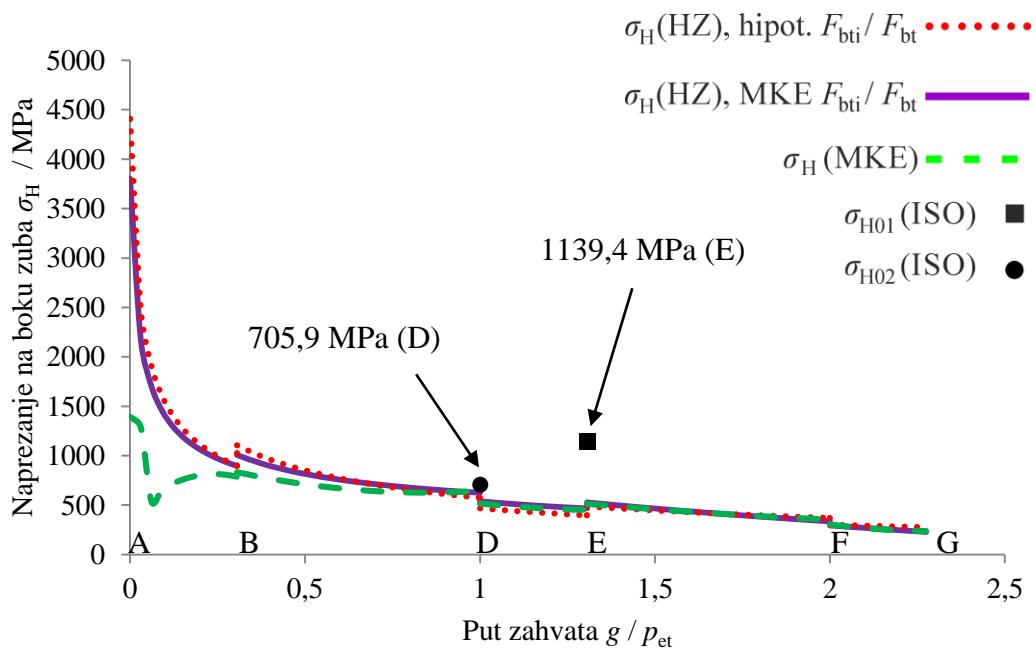
Nakon početnog vrha, vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika dobivena putem MKE naglo pada na početku prvog trostrukog zahvata, a zatim postepeno raste prema kraju prvog trostrukog zahvata, a u blizini točke zahvata D gotovo se izjednačuje s vrijednostima naprezanja prema metodi [35], [44], [73] uz raspodjelu sile prema MKE.

Nagli pad naprezanja na početku zahvata posljedica je prelaska dodira ruba vrha zuba s unutarnjim ozubljenjem i boka zuba s vanjskim ozubljenjem u dodir bokova zuba te velike dodirne površine u tom dijelu zahvata.

Vrlo visoko naprezanje u točki zahvata A može se objasniti malim relativnim polumjerom zakriviljenosti u toj točki (Slika 8.57).

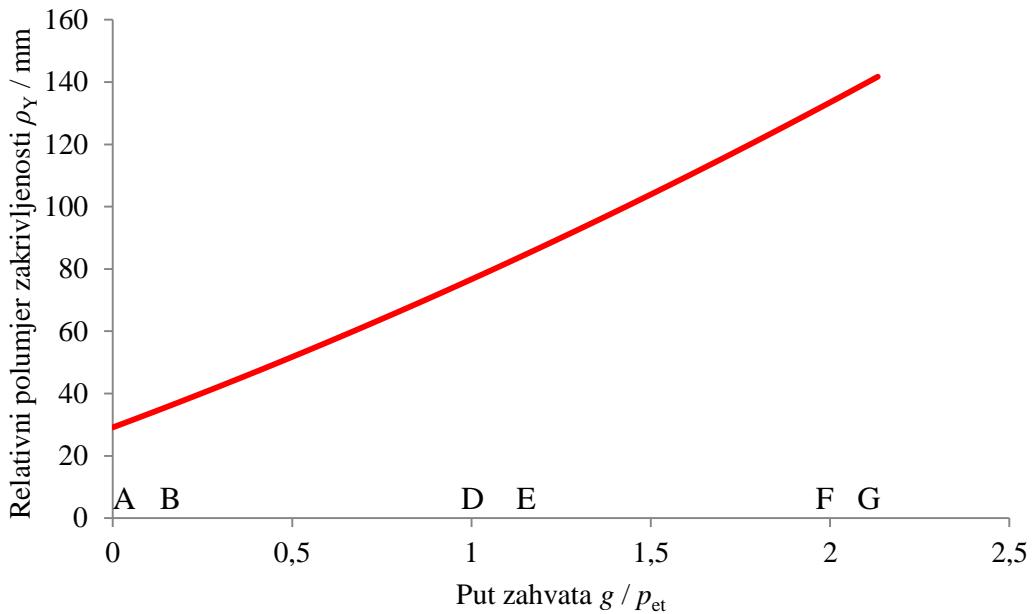
Vrijednost naprezanja na boku zuba u točki A proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju hipotetske raspodjele sile trostruko je veća od vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, dok vrijednost naprezanja proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju raspodjele sile dobivene putem MKE iznosi 253 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE u promatranoj točki zahvata A.

Vrijednosti naprezanja prema ISO 6336 [22] više su od vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE i proračuna prema [35], [44], [73] za oba zupčanika.

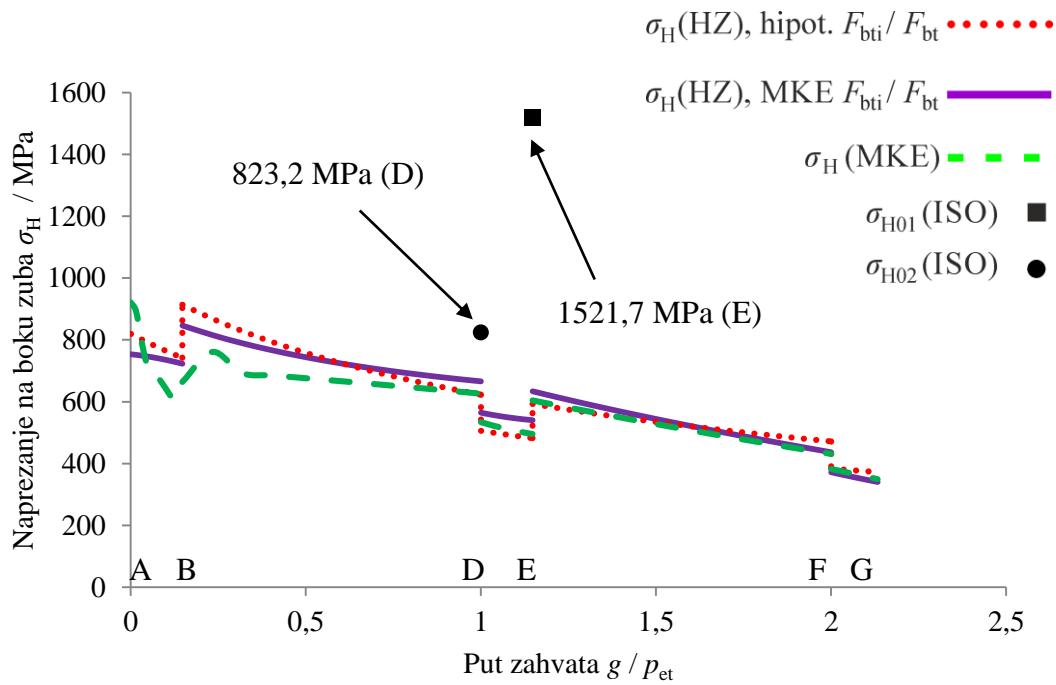


Slika 8.58 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 0

Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba tijekom zahvata zupčanog para 1 prikazana je na slici 8.59, dok je promjena naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 1 prikazana na slici 8.60.



Slika 8.59 Promjena relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 1



Slika 8.60 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 1

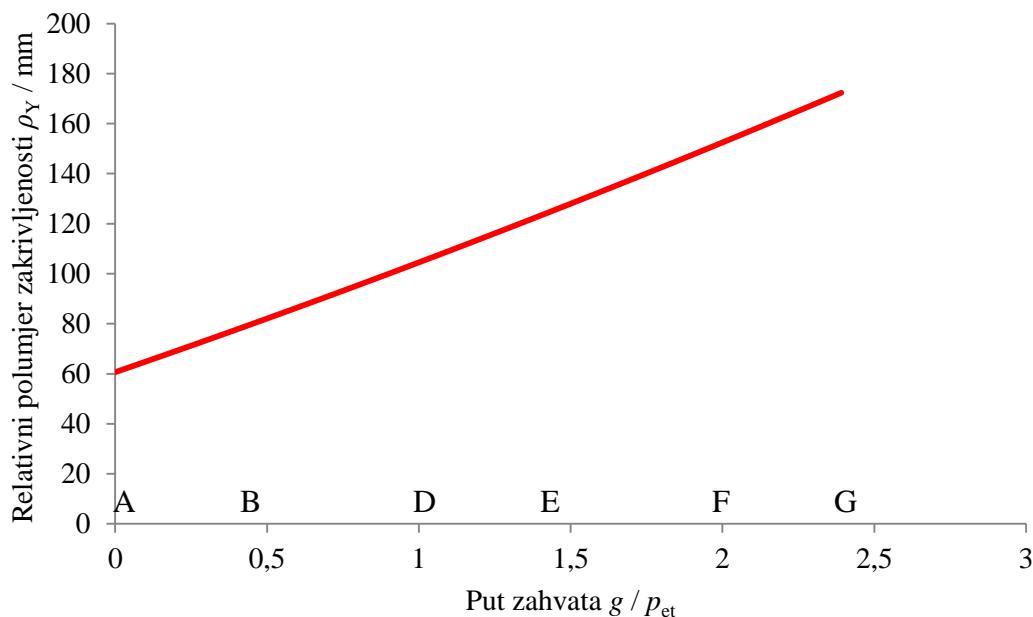
Nakon početnog vrha, vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika dobivena putem MKE naglo pada na početku prvog trostrukog zahvata, a zatim postepeno raste prema kraju prvog trostrukog zahvata, a u blizini točke zahvata D gotovo se izjednačuje s vrijednostima naprezanja prema metodi [35], [44], [73] uz raspodjelu sile prema MKE.

Nagli pad naprezanja na početku zahvata posljedica je prelaska dodira ruba vrha glave zuba s unutarnjim ozubljenjem i boka zuba s vanjskim ozubljenjem u dodir bokova zuba te velike dodirne površine u tom dijelu zahvata.

Vrijednost naprezanja na boku zuba u točki A proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju hipotetske raspodjele sile iznosi 89 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, dok vrijednost naprezanja proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju raspodjele sile dobivene putem MKE iznosi 82 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, što je posljedica povećane vrijednosti relativnog polumjera zakrivljenosti u točki zahvata A.

Vrijednosti naprezanja prema ISO 6336 [22] više su od vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE i proračuna prema [35], [44], [73] za oba zupčanika.

Promjena relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba tijekom zahvata zupčanog para 2 prikazana je na slici 8.61, dok je promjena naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 2 prikazana na slici 8.62.



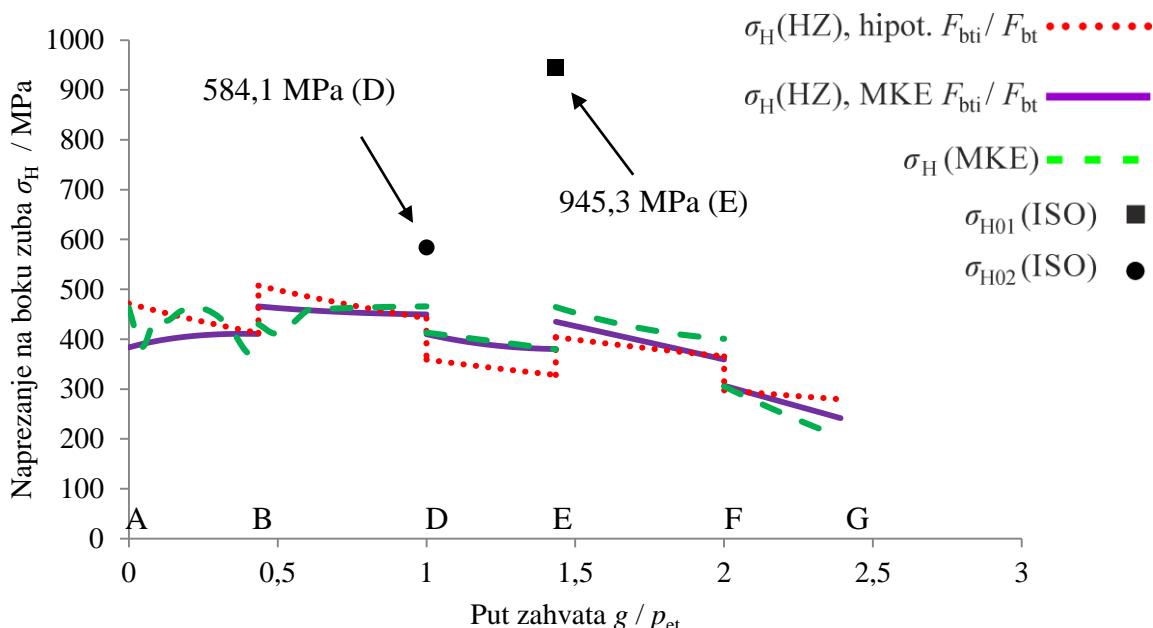
Slika 8.61 Promjena relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 2

Nakon početnog vrha, vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika dobivena putem MKE naglo pada na početku prvog trostrukog zahvata, a zatim postepeno raste prema kraju prvog trostrukog zahvata, a u blizini točke zahvata D gotovo se izjednačuje s vrijednostima naprezanja prema metodi [35], [44], [73] uz raspodjelu sile prema MKE.

Nagli pad naprezanja na početku zahvata posljedica je prelaska dodira ruba vrha zuba s unutarnjim ozubljenjem i boka zuba s vanjskim ozubljenjem u dodir bokova zuba te velike dodirne površine u tom dijelu zahvata. Skok naprezanja u točki zahvata B je posljedica prelaska u područje prvog dvostrukog zahvata.

Vrijednost naprezanja na boku zuba u točki A proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju hipotetske raspodjele sile iznosi 102 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, dok vrijednost naprezanja proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju raspodjele sile dobivene putem MKE iznosi 83 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, što je posljedica povećane vrijednosti relativnog polumjera zakrivljenosti u točki zahvata A.

Vrijednosti naprezanja prema ISO 6336 [22] više su od vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE i proračuna prema [35], [44], [73] za oba zupčanika.



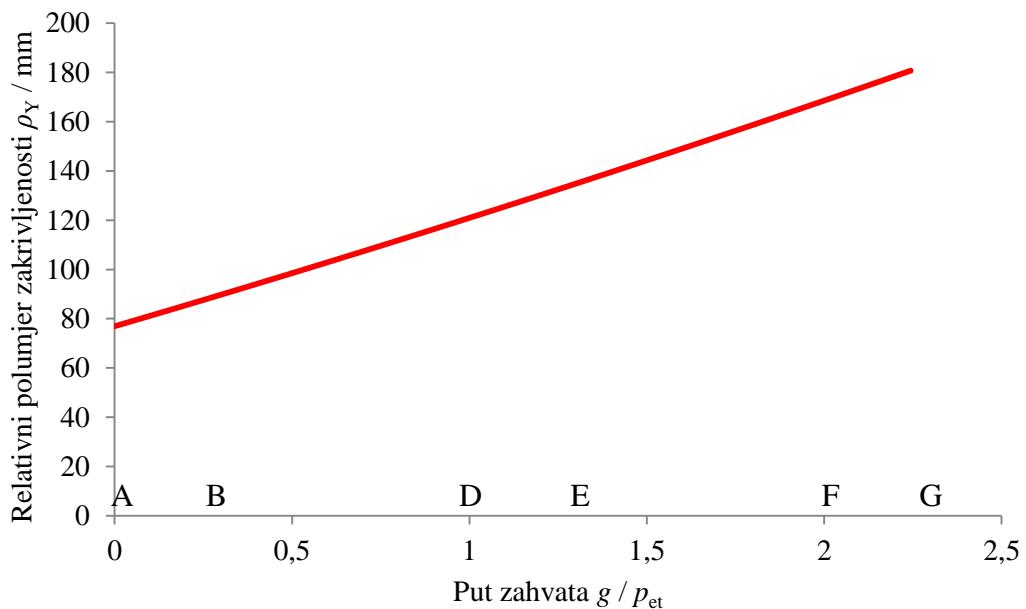
Slika 8.62 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 2

Promjena relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba tijekom zahvata zupčanog para 3 prikazana je na slici 8.63, dok je promjena naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 3 prikazana na slici 8.64.

Početni maksimum naprezanja u točki zahvata A nije vidljiv kod ovog zupčanog para, što se može objasniti velikim relativnim polumjerom zakrivljenosti u točki A (Slika 8.63).

Vrijednost naprezanja na boku zuba u točki A proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju hipotetske raspodjele sile iznosi 155 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, dok vrijednost naprezanja proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju raspodjele sile dobivene

putem MKE iznosi 121 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, što je posljedica povećane vrijednosti relativnog polumjera zakrivljenosti u točki zahvata A.



Slika 8.63 Promjena relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 3

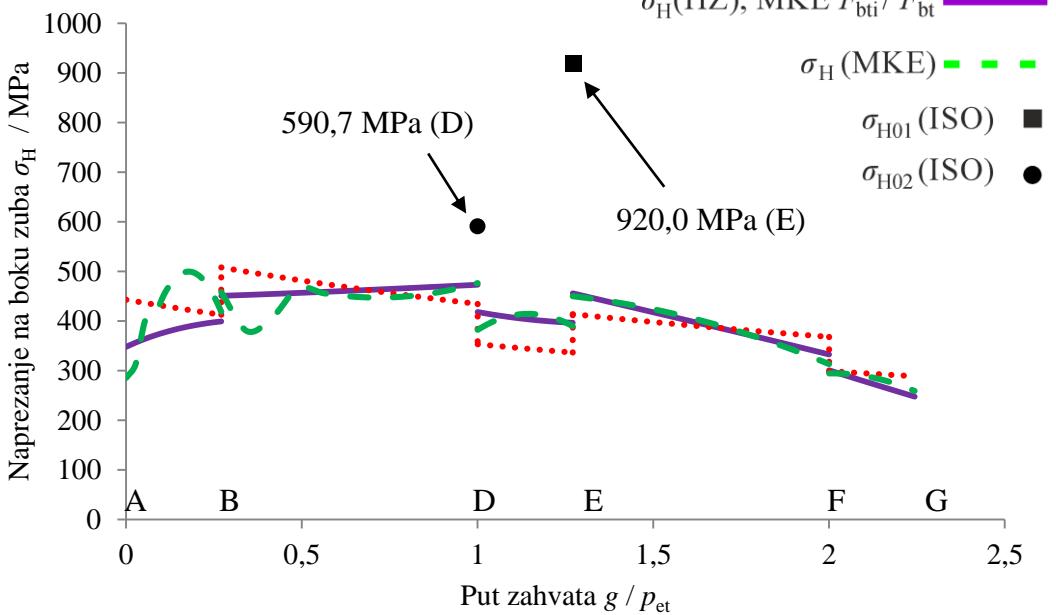
$\sigma_H(\text{HZ})$ , hipot.  $F_{\text{bti}} / F_{\text{bt}}$  ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$\sigma_H(\text{HZ})$ , MKE  $F_{\text{bti}} / F_{\text{bt}}$  — — — — —

$\sigma_H(\text{MKE})$  - - - - -

$\sigma_{H01}(\text{ISO})$  ■

$\sigma_{H02}(\text{ISO})$  ●

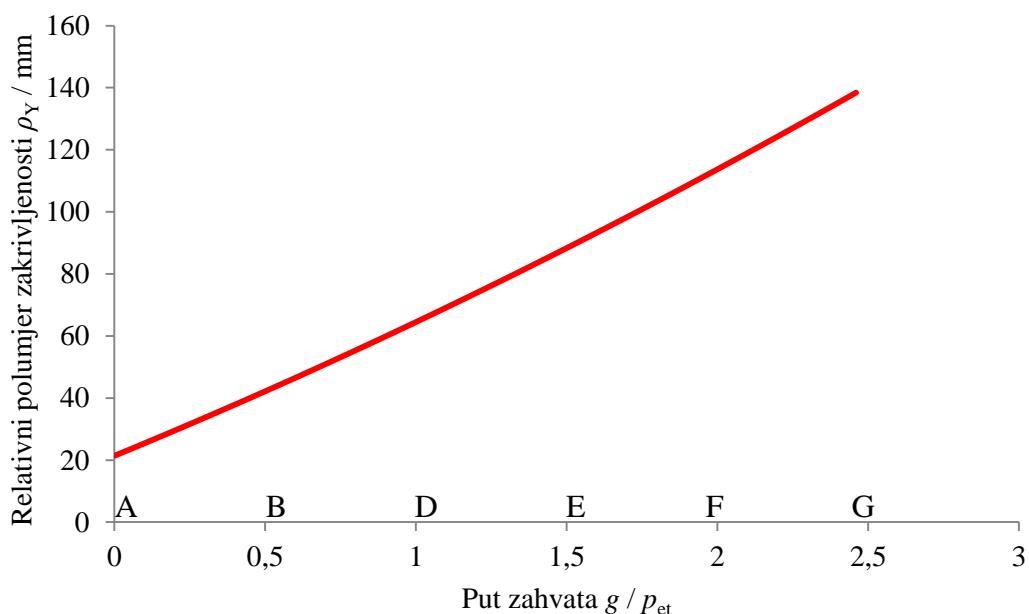


Slika 8.64 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 3

Niska vrijednost naprezanja u početku zahvata posljedica je prelaska iz dodira ruba glave zuba s unutarnjim ozubljenjem s bokom zuba s vanjskim ozubljenjem u dodir bokova zuba te velike dodirne površine u tom dijelu zahvata. Skok naprezanja u točki zahvata B posljedica je prelaska iz područja prvog trostrukog zahvata u područje prvog dvostrukog zahvata.

Vrijednosti naprezanja prema ISO 6336 [22] više su od vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE i proračuna prema [35], [44], [73] za oba zupčanika.

Promjena relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba tijekom zahvata zupčanog para 4 prikazana je na slici 8.65, dok je promjena naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 4 prikazana na slici 8.66.



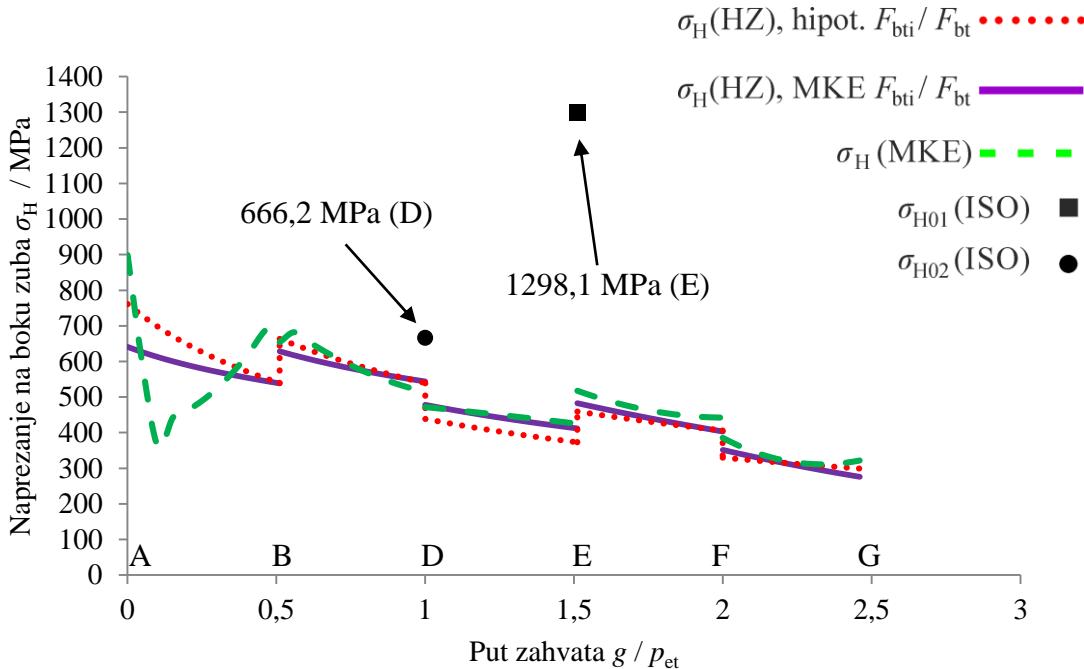
Slika 8.65 Promjena relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 4

Vrijednost naprezanja na boku zuba u točki A proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju hipotetske raspodjele sile iznosi 85 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, dok vrijednost naprezanja proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju raspodjele sile dobivene putem MKE iznosi 71 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, što je posljedica povećane vrijednosti relativnog polumjera zakrivljenosti u točki zahvata A.

Niska vrijednost naprezanja u početku zahvata posljedica je prelaska iz dodira ruba glave zuba s unutarnjim ozubljenjem s bokom zuba s vanjskim ozubljenjem u dodir bokova zuba, te

velike dodirne površine u tom dijelu zahvata. Skok naprezanja u točki zahvata B posljedica je prelaska iz područja prvog trostrukog zahvata u područje prvog dvostrukog zahvata.

Vrijednosti naprezanja prema ISO 6336 [22] više su od vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE i proračuna prema [35], [44], [73] za oba zupčanika.

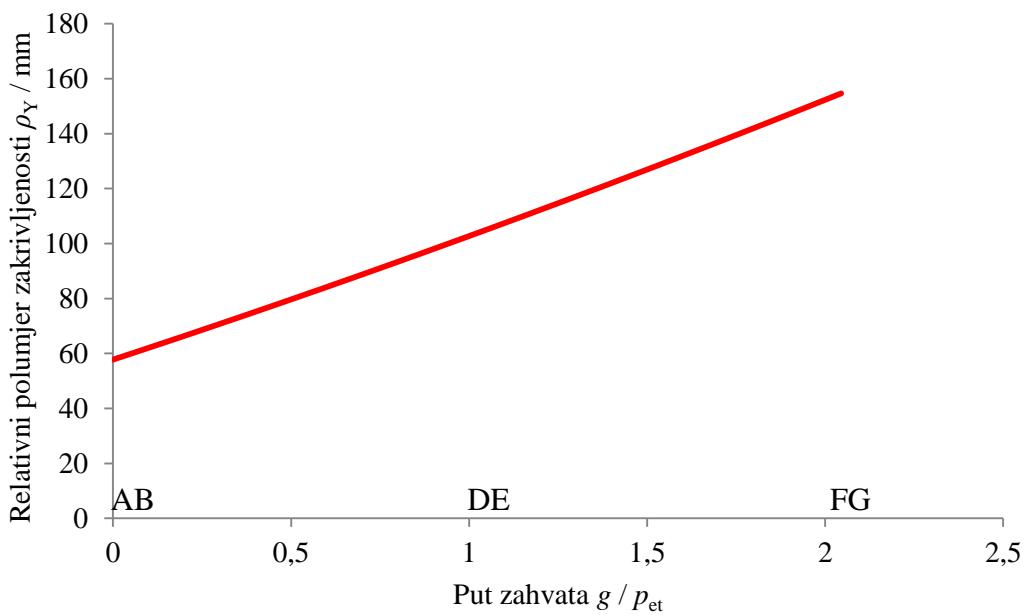


Slika 8.66 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 4

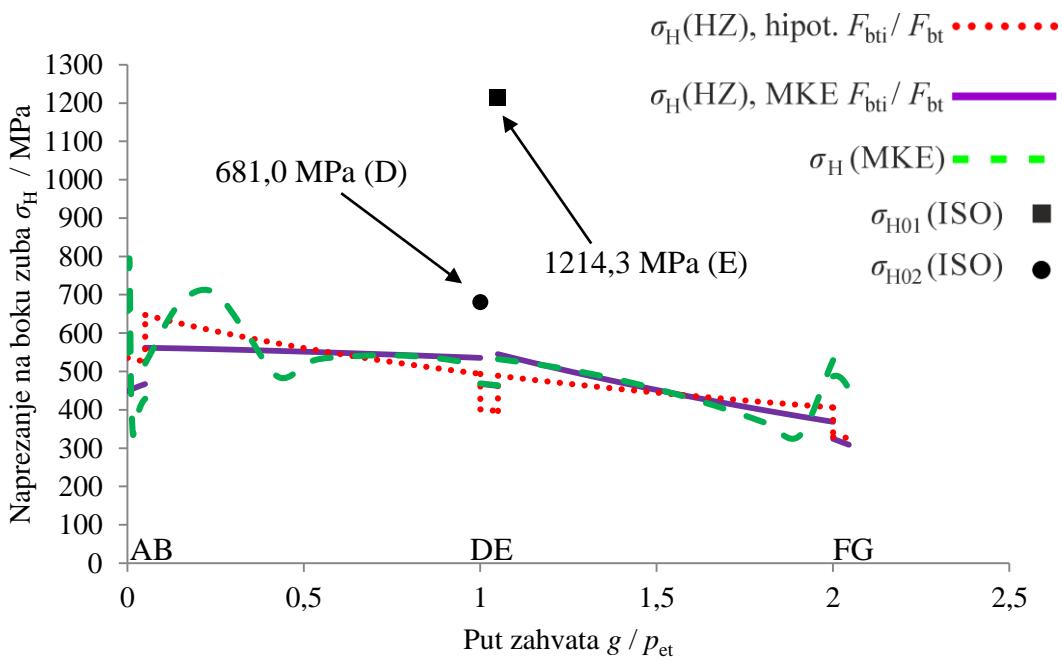
Promjena relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba tijekom zahvata zupčanog para 5 prikazana je na slici 8.67, dok je promjena naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 5 prikazana na slici 8.68.

Vrijednost naprezanja na boku zuba u točki A proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju hipotetske raspodjele sile iznosi 69 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, dok vrijednost naprezanja proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju raspodjele sile dobivene putem MKE iznosi 55 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, što je posljedica povećane vrijednosti relativnog polumjera zakrivljenosti u točki zahvata A (Slika 8.67).

Niska vrijednost naprezanja u početku zahvata posljedica je prelaska iz dodira ruba glave zuba s unutarnjim ozubljenjem s bokom zuba s vanjskim ozubljenjem u dodir bokova zuba, te velike dodirne površine u tom dijelu zahvata. Skok naprezanja u točki zahvata B posljedica je prelaska iz područja prvog trostrukog zahvata u područje prvog dvostrukog zahvata. Područja trostrukog zahvata vrlo su kratka zbog stupnja prekrivanja  $\varepsilon_a \approx 2$ , a skok naprezanja u posljednjem području trostrukog zahvata je posljedica geometrije zupčanika.



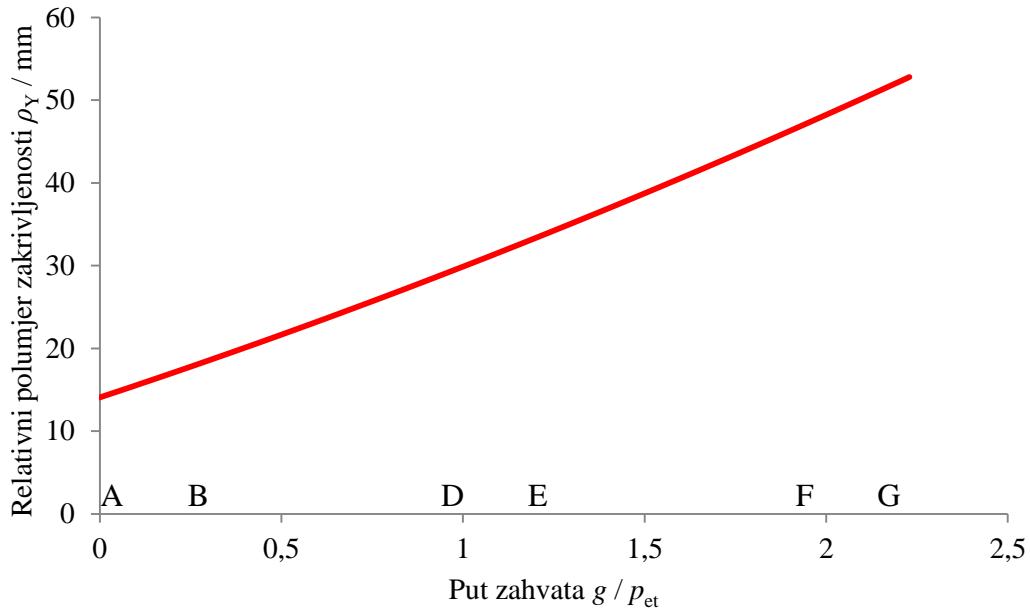
Slika 8.67 Promjena relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 5



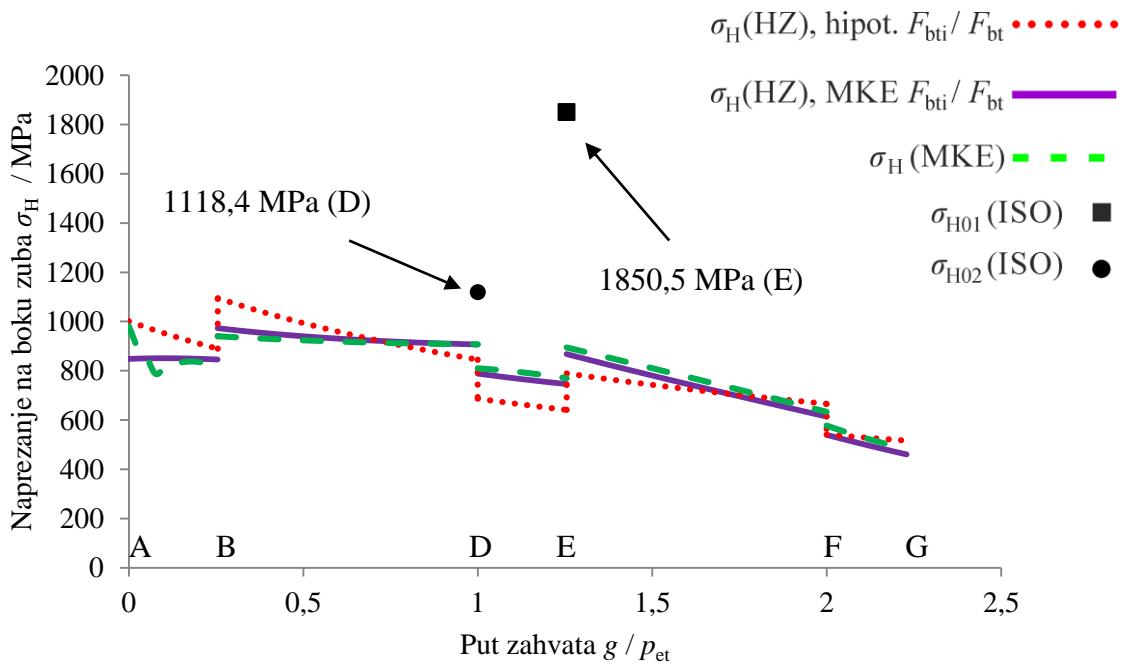
Slika 8.68 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 5

Vrijednosti naprezanja prema ISO 6336 [22] više su od vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE i proračuna prema [35], [44], [73] za oba zupčanika.

Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba tijekom zahvata zupčanog para 6 prikazana je na slici 8.69, dok je promjena naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 6 prikazana na slici 8.70.



Slika 8.69 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 6



Slika 8.70 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 6

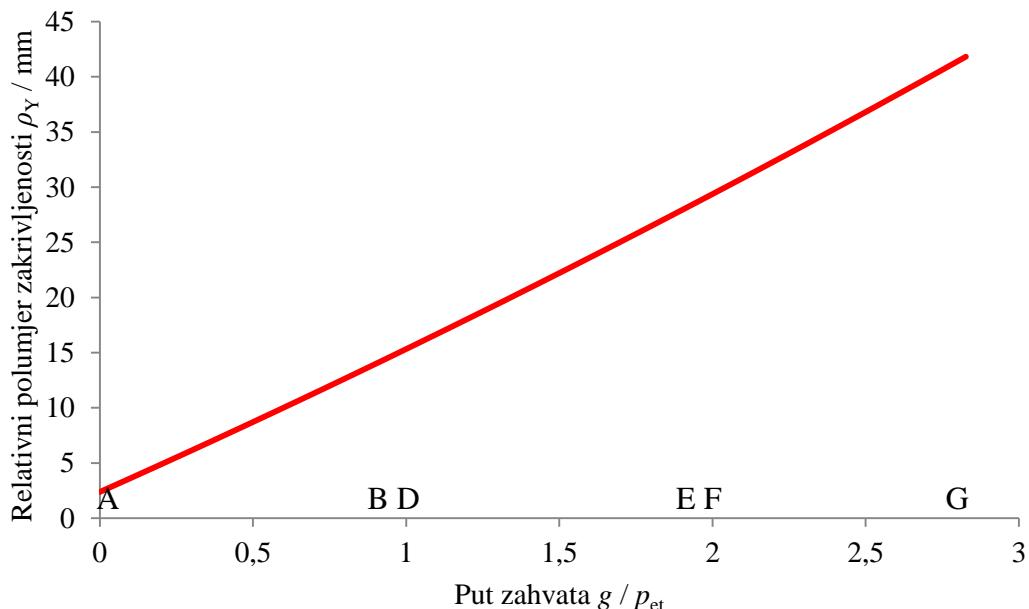
Vrijednost naprezanja na boku zuba u točki A proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju hipotetske raspodjele sile iznosi 102 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, dok vrijednost naprezanja proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju raspodjele sile dobivene putem MKE iznosi 86 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, što je posljedica povećane vrijednosti relativnog polumjera zakriviljenosti u točki zahvata A (Slika 8.69).

Nakon početnog vrha u točki zahvata A, naprezanje po MKE u početku zahvata naglo pada pa postepeno raste prema točki zahvata B, da bi se prije točke B gotovo izjednačilo s vrijednostima naprezanja prema [35], [44], [73] uz raspodjelu sile prema MKE.

Niska vrijednost naprezanja u početku zahvata posljedica je prelaska iz dodira ruba glave zuba s unutarnjim ozubljenjem s bokom zuba s vanjskim ozubljenjem u dodir bokova zuba, te velike dodirne površine u tom dijelu zahvata.

Skok naprezanja u točki zahvata B posljedica je prelaska iz područja prvog trostrukog zahvata u područje prvog dvostrukog zahvata. Vrijednosti naprezanja prema ISO 6336 [22] više su od vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE i proračuna prema [35], [44], [73] za oba zupčanika.

Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba tijekom zahvata zupčanog para 7 prikazana je na slici 8.71, dok je promjena naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 7 prikazana na slici 8.72.



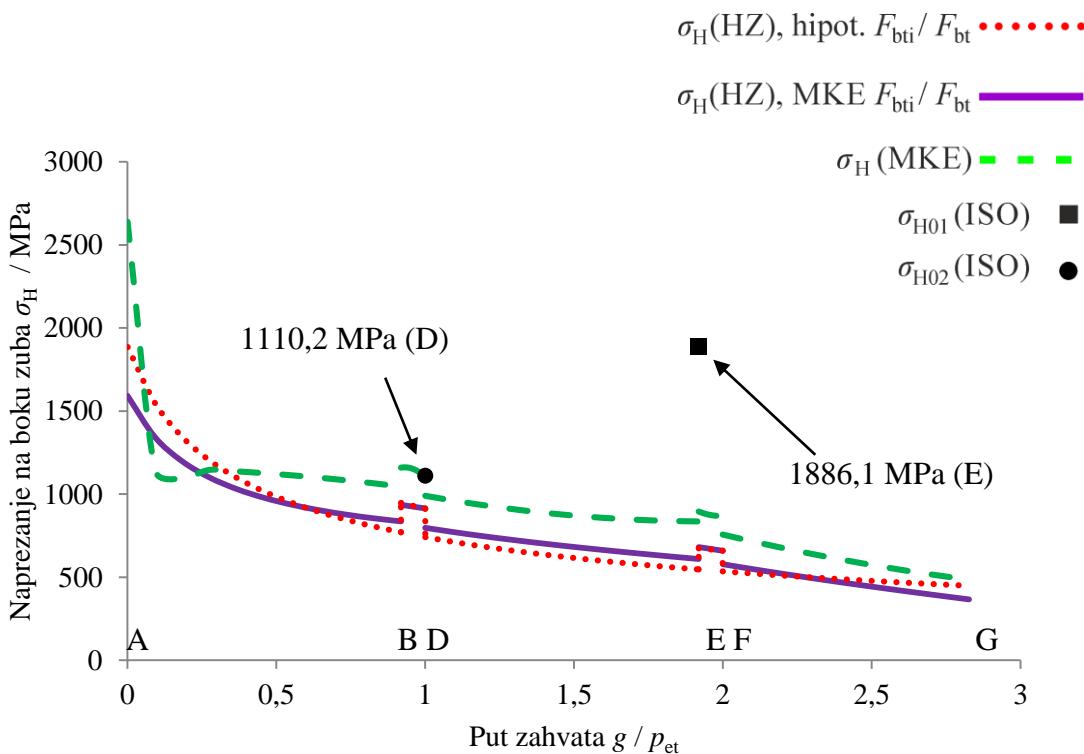
Slika 8.71 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 7

Vrijednost naprezanja na boku zuba u točki A proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju hipotetske raspodjele sile iznosi 74 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, dok vrijednost naprezanja proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju raspodjele sile dobivene putem MKE iznosi 63 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE.

Nagli pad vrijednosti naprezanja u početku zahvata posljedica je prelaska iz dodira ruba glave zuba s unutarnjim ozubljenjem s bokom zuba s vanjskim ozubljenjem u dodir bokova zuba, te velike dodirne površine u tom dijelu zahvata.

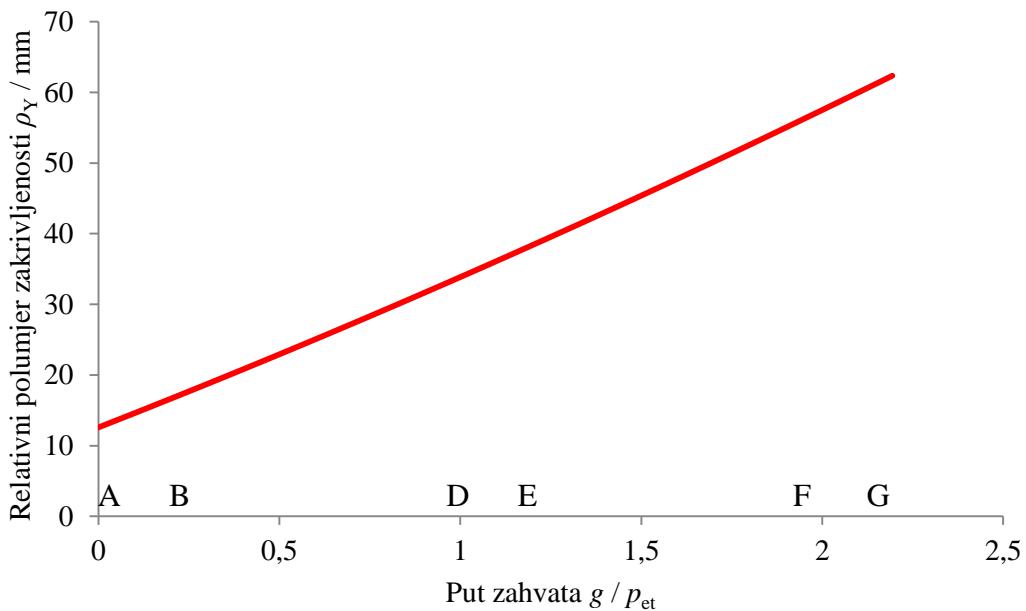
Relativni polumjer zakriviljenosti je kod ovog zupčanog para vrlo mali (Slika 8.71), zbog čega su maksimalne vrijednosti proračuna prema [35], [44], [73] velike.

Vrijednost naprezanja prema ISO 6336 [22] viša je od vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE i proračuna prema [35], [44], [73] za zupčanik s vanjskim ozubljenjem, dok je vrijednost za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem niža.

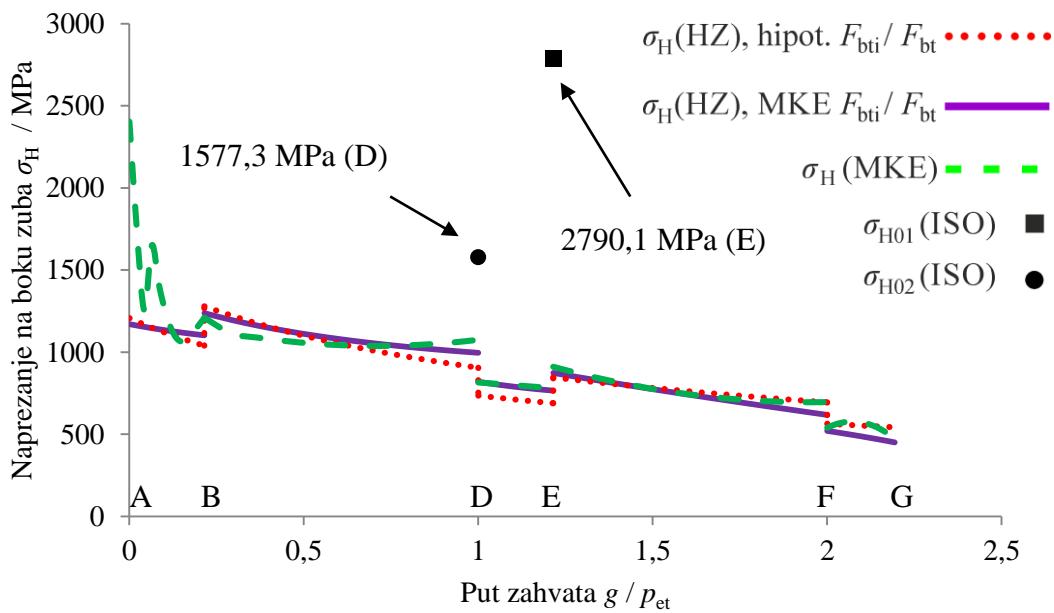


Slika 8.72 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 7

Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba tijekom zahvata zupčanog para 8 prikazana je na slici 8.73, dok je promjena naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 8 prikazana na slici 8.74.



Slika 8.73 Promjena relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 8



Slika 8.74 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 8

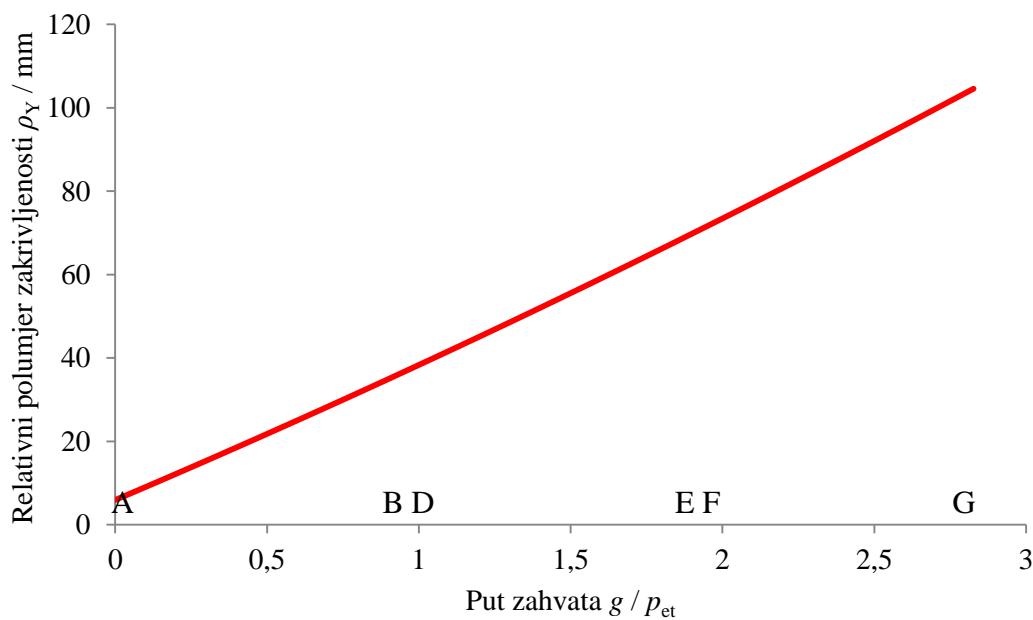
Vrijednost naprezanja na boku zuba u točki A proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju hipotetske raspodjele sile iznosi 52 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, dok vrijednost naprezanja proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju raspodjele sile dobivene putem MKE iznosi 50 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE.

Nagli pad vrijednosti naprezanja u početku zahvata posljedica je prelaska iz dodira ruba glave zuba s unutarnjim ozubljenjem s bokom zuba s vanjskim ozubljenjem u dodir bokova zuba, te velike dodirne površine u tom dijelu zahvata.

Relativni polumjer zakriviljenosti nešto je veći kod ovog zupčanog para vrlo mali (Slika 8.71) pa su maksimalne vrijednosti proračuna prema [35], [44], [73] manje.

Skok naprezanja u točki zahvata B posljedica je prelaska iz područja prvog trostrukog zahvata u područje prvog dvostrukog zahvata. Vrijednosti naprezanja prema ISO 6336 [22] više su od vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE i proračuna prema [35], [44], [73] za oba zupčanika.

Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba tijekom zahvata zupčanog para 9 prikazana je na slici 8.75, dok je promjena naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 9 prikazana na slici 8.76.



Slika 8.75 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 9

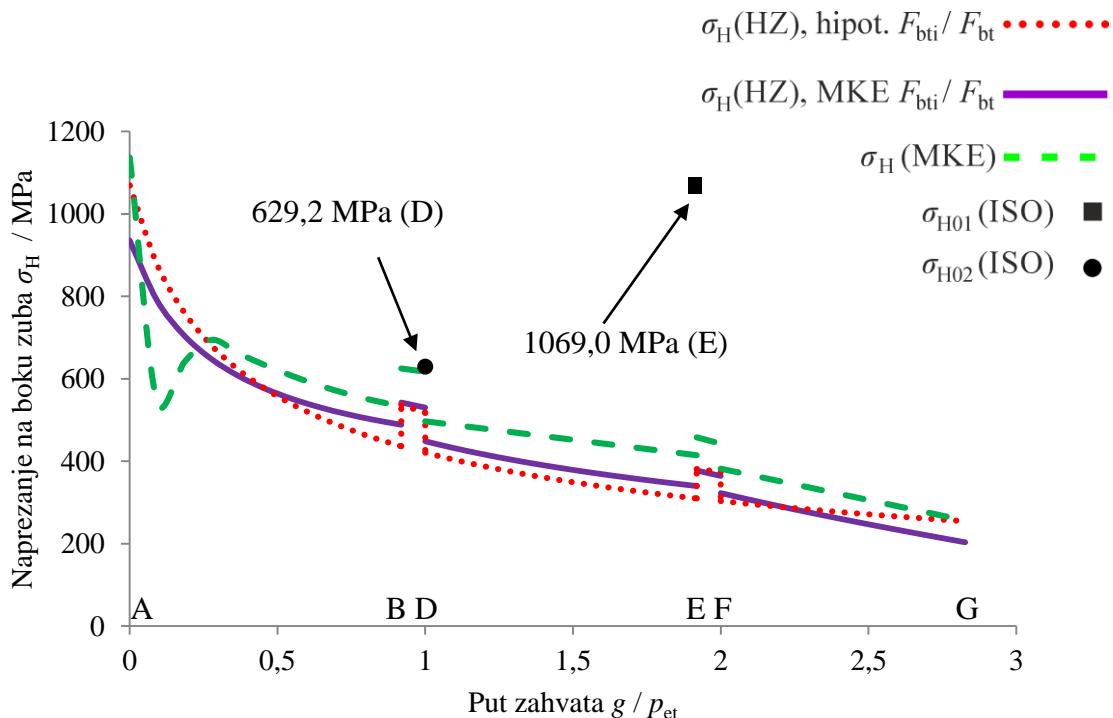
Relativni polumjer zakriviljenosti u točki zahvata A kod ovog zupčanog para vrlo je mali (Slika 8.75) pa je maksimalna vrijednost naprezanja u točki A velika.

Vrijednost naprezanja na boku zuba u točki A proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju hipotetske raspodjele sile iznosi 94 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, dok

vrijednost naprezanja proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju raspodjele sile dobivene putem MKE iznosi 82 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE.

Nagli pad vrijednosti naprezanja u početku zahvata posljedica je prelaska iz dodira ruba glave zuba s unutarnjim ozubljenjem s bokom zuba s vanjskim ozubljenjem u dodir bokova zuba, te velike dodirne površine u tom dijelu zahvata.

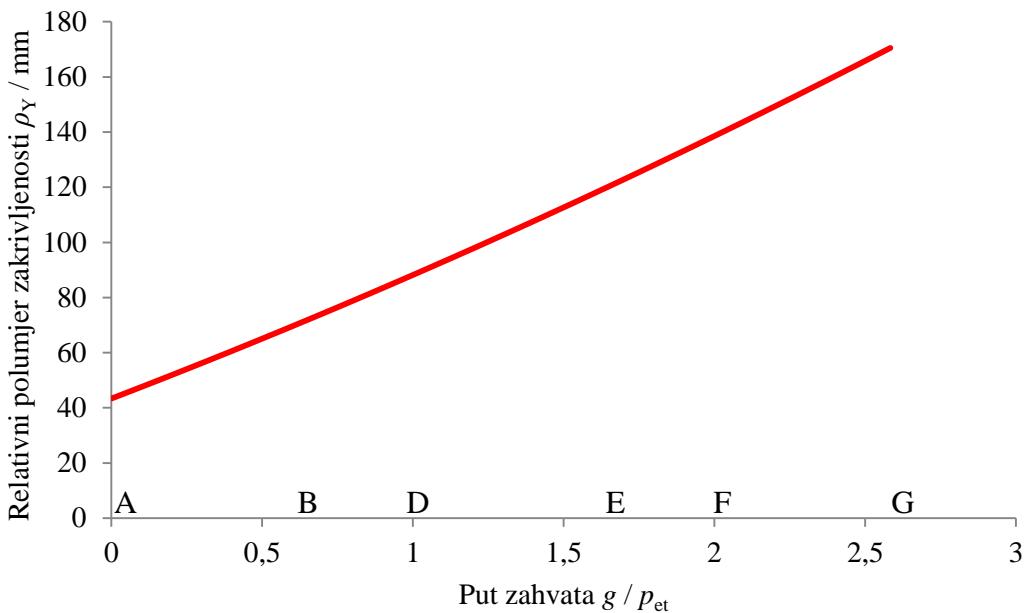
Područja dvostrukog zahvata su kratka, što odgovara zupčanom paru sa stupnjem prekrivanja  $\varepsilon_a \approx 3$ .



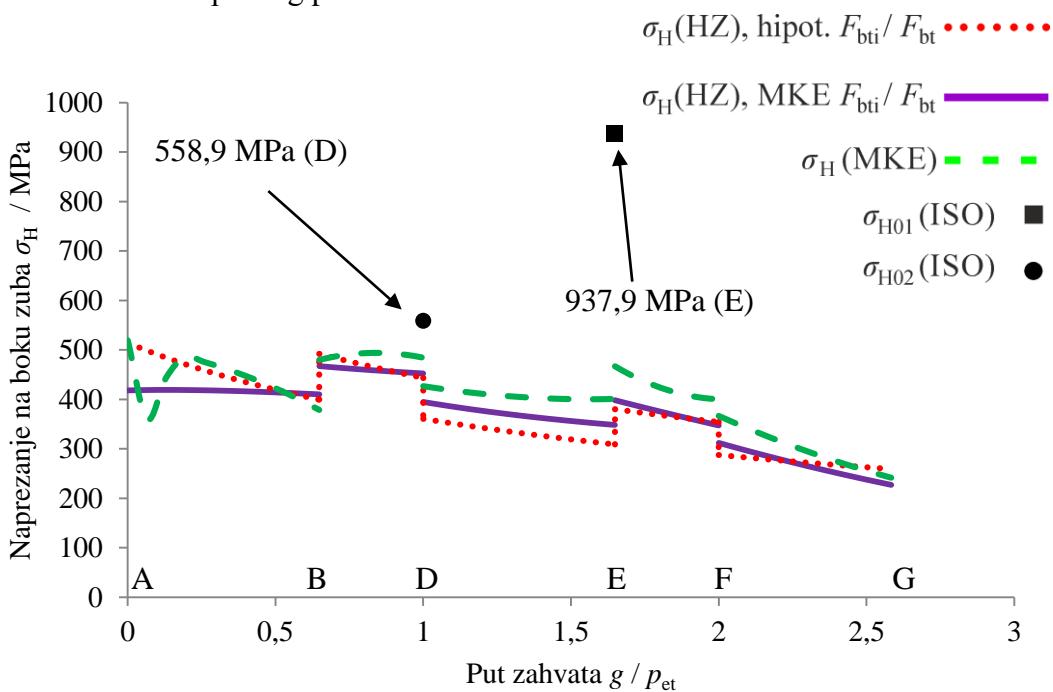
Slika 8.76 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 9

Vrijednosti naprezanja prema ISO 6336 [22] više su od vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE i proračuna prema [35], [44], [73] za oba zupčanika.

Promjena relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba tijekom zahvata zupčanog para 10 prikazana je na slici 8.77, dok je promjena naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 10 prikazana na slici 8.78.



Slika 8.77 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 10



Slika 8.78 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 10

Relativni polumjer zakriviljenosti u točki zahvata A nešto je veći kod ovog zupčanog para pa je vrijednost naprezanja u točki A proračunata prema [35], [44], [73] bliska vrijednosti dobivenoj putem metode konačnih elemenata.

Vrijednost naprezanja na boku zuba u točki A proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju hipotetske raspodjele sile iznosi 99 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE, dok vrijednost naprezanja proračunata prema [35], [44], [73] u slučaju raspodjele sile dobivene putem MKE iznosi 81 % vrijednosti naprezanja dobivene putem MKE.

Nagli pad vrijednosti naprezanja u početku zahvata posljedica je prelaska iz dodira ruba glave zuba s unutarnjim ozubljenjem s bokom zuba s vanjskim ozubljenjem u dodir bokova zuba, te velike dodirne površine u tom dijelu zahvata.

Vrijednosti naprezanja prema ISO 6336 [22] više su od vrijednosti naprezanja dobivenih putem MKE i proračuna prema [35], [44], [73] za oba zupčanika.

Analizom podataka za prikazane zupčane parove utvrđeno je da se najveća vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika prema MKE pojavljuje u točki zahvata A, u točki zahvata B ili u blizini točke zahvata B te da su vrijednosti naprezanja u točkama zahvata D i E vrlo bliske te uvijek manje od vrijednosti naprezanja u točki zahvata B.

Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika izračunate za prvo područje trostrukog zahvata A – B prema izrazu (4.43) iz [35], [44], [73] značajnije odstupaju od vrijednosti dobivenih putem MKE neovisno o upotrijebljenoj raspodjeli sile, dok se u ostalim područjima zahvata vrijednosti naprezanja dosta dobro podudaraju. Zbog toga je odlučeno odrediti izraze za naprezanje na boku zuba zupčanika za točke zahvata A i B.

Analizom raspodjele sile u zahvatu zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem provedenom u ovom radu utvrđeno je da vrijednost sile kojom je zupčani par opterećen u točki zahvata A ne prelazi jednu trećinu sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ , a da vrijednost sile kojom je zupčani par opterećen u točki zahvata B ne prelazi jednu polovinu sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ .

Na temelju navedenoga utvrđen je modificirani izraz (4.43) za vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika u točki zahvata A u kojem se koristi jedna trećina sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ ,

$$\sigma_{HA} = \sqrt{\frac{F_{bt}E}{6\pi\rho_Y b(1-\nu^2)}} Z_\varepsilon, \quad (8.1)$$

kao i modificirani izraz za vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika u točki zahvata B u kojem se koristi jedna polovina sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ ,

$$\sigma_{HB} = \sqrt{\frac{F_{bt}E}{4\pi\rho_Y b(1-\nu^2)}} Z_\varepsilon. \quad (8.2)$$

Vrijednosti naprezanja u točkama zahvata A ( $\sigma_{HAMKE}$ ) i B ( $\sigma_{HBMKE}$ ) dobivene putem MKE i predloženih izraza za naprezanje na boku zuba zupčanika u tim točkama zahvata ( $\sigma_{HA}$ ,  $\sigma_{HB}$ ) pri djelovanju najveće sile u zahvatu  $F_{bt4}$  prikazane su u tablici 8.6.

Tablica 8.6 Vrijednosti naprezanja u točkama zahvata A i B dobivene putem MKE i predloženih izraza (8.1) i (8.2) za naprezanje na boku zuba zupčanika pri djelovanju najveće sile  $F_{bt4}$

Par	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_{HAMKE}$ / MPa	1395	921	463	286	899	547	982	2638	2403	1137	520
$\sigma_{HA}$ / MPa	4430	824	474	405	764	539	1006	1895	1213	1074	517
$\sigma_{HBMKE}$ / MPa	834	664	430	458	654	521	940	1158	1209	624	480
$\sigma_{HB}$ / MPa	1104	914	507	508	664	647	1094	947	1279	536	492

Analizom vrijednosti prikazanih u tablici 8.6 utvrđeno je da su vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivene izrazima (8.1) i (8.2) zadovoljavajuće, tj. jednake ili veće od vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivenih metodom konačnih elemenata samo kod zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem kojima je zahvatni kut  $\alpha = 20^\circ$ , a to su parovi 0, 2 i 6.

Zbog toga je definiran utjecajni faktor zahvatnog kuta

$$Z_\alpha = \frac{20^\circ}{\alpha}. \quad (8.3)$$

Sada je moguće korigirati izraze (8.1) i (8.2) pa izraz (8.1) prelazi u oblik

$$\sigma_{HAK} = \sqrt{\frac{F_{bt}E}{6\pi\rho_Y b(1-\nu^2)}} Z_\varepsilon Z_\alpha, \quad (8.4)$$

dok izraz (8.2) prelazi u oblik

$$\sigma_{HBK} = \sqrt{\frac{F_{bt}E}{4\pi\rho_Y b(1-\nu^2)}} Z_\varepsilon Z_\alpha. \quad (8.5)$$

Vrijednosti iz tablice 8.6 ponovno su izračunate korištenjem izraza (8.4) i (8.5) (Tablica 8.7).

Tablica 8.7 Vrijednosti naprezanja u točkama zahvata A i B dobivene putem MKE i korigiranih izraza (8.4 i 8.5) za naprezanje na boku zuba zupčanika pri djelovanju najveće sile  $F_{bt4}$

Par	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_{HAMKE}$ / MPa	1395	921	463	286	899	547	982	2638	2403	1137	520
$\sigma_{HAK}$ / MPa	4430	970	474	405	1093	598	1006	2708	2426	1534	574
$\sigma_{HBMKE}$ / MPa	834	664	430	458	654	521	940	1158	1209	624	480
$\sigma_{HBK}$ / MPa	1104	1075	508	462	948	719	1094	1353	2559	767	546

Ovako dobivene vrijednosti veće su ili jednake vrijednostima dobivenim putem MKE u svim promatranim točkama zahvata pa se izrazi (8.4) i (8.5) mogu koristiti za proračun naprezanja na boku zuba zupčanika UVPP zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem.

Kod nekih zupčanih parova u pojedinim točkama zahvata pojavljuju se veća odstupanja između vrijednosti dobivenih putem metode konačnih elemenata i vrijednosti dobivenih izrazima (8.4) i (8.5). Detaljnom analizom uočeno je da je u slučajevima manjih vrijednosti relativnog polumjera zakrivljenosti  $\rho_Y$  u promatranoj točki zahvata vrijednost naprezanja na boku zuba zupčanika proračunata prema izrazu iz [35], [44], [73] mnogo veća od one dobivene putem MKE, dok je kod većih vrijednosti  $\rho_Y$  ta vrijednost tek nešto veća od vrijednosti dobivene putem MKE. Ovo je posebno izraženo u točki zahvata A, zbog dodira oštrog ruba glave zupčanika s unutarnjim ozubljenjem s konveksnim bokom zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem.

Može se zaključiti da je potrebno u budućim istraživanjima detaljnije istražiti utjecaj relativnog polumjera zakrivljenosti bokova zuba zupčanika na vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika, kao i mogućnosti smanjivanja naprezanja na početku zahvata zupčanog para zaobljivanjem glave zuba zupčanika.

## 9. Zaključak

U ovom radu provedena je analiza nosivosti UVPP ozubljenja u području  $2 < \varepsilon_a < 3$ , pri čemu je dokazana povećana nosivost ovog ozubljenja u odnosu na uobičajeno ozubljenje s  $\varepsilon_a < 2$ .

Na temelju analize parametara geometrije UVPP ozubljenja i njihovog utjecaja na vrijednost stupnja prekrivanja profila  $\varepsilon_a$  preporuča se korištenje zahvatnog kuta  $\alpha_n = 14\ldots 20^\circ$ , pri čemu je potrebna vrijednost faktora visine glave zuba alata  $1,25 < h_{a0}^* < 1,75$ , zbog izbjegavanja zašiljenosti vrha zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem.

Utvrđeno je da su utjecaji prijenosnog omjera i pomaka profila zupčanog para na stupanj prekrivanja profila neznatni.

Analizirane su smetnje prilikom izrade i smetnje prilikom montaže zupčanih parova s unutarnjim ozubljenjem za slučaj izrade reznim zupčanikom. Te smetnje mogu se izbjegići ukoliko se oba zupčanika izrade istim reznim zupčanikom uz uvjete  $z_{01,2} \geq 34$ ,  $z_1 \geq z_{01,2}$ ,  $|z_2| \geq 70$ .

Prilikom analize geometrije kosog UVPP ozubljenja potvrđeno je da vrijednost kuta nagiba zuba  $\beta$  izravno utječe na vrijednost stupnja prekrivanja profila  $\varepsilon_a$  i na vrijednost stupnja prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta$ , a time i na ukupni stupanj prekrivanja  $\varepsilon_\gamma$ . Nadalje, poznato je da je vrijednost stupnja prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta$  proporcionalna kutu nagiba zuba  $\beta$  i širini zuba zupčanika  $b$ . To znači da se izborom dovoljno velike širine zuba zupčanika i/ili izborom dovoljno velikog kuta nagiba zuba mogu postići vrijednosti stupnja prekrivanja zupčanog para  $\varepsilon_\gamma > 2$  čak i u slučajevima  $\varepsilon_a < 1$ , ili  $\varepsilon_\gamma > 3$  kod zupčanih parova sa stupnjem prekrivanja profila  $2 < \varepsilon_a < 3$ . Iz tih razloga koso ozubljenje u ovom radu nije dalje razmatrano.

Analiziran je proračun naprezanja u korijenu i na boku zuba UVPP zupčanika prema normi ISO 6336 [22]. Taj postupak proračuna koristi ukupnu silu u zahvatu zupčanog para za proračun naprezanja u korijenu i na boku zuba UVPP zupčanih parova, uz napomenu da to pridonosi sigurnosti proračuna.

Narezanje u korijenu i na boku zuba zupčanika UVPP zupčanih parova u ovom radu proračunato je putem metode konačnih elemenata, a rezultati te analize verificirani su eksperimentalno metodom fotoelasticimetrije.

Za potrebe eksperimentalne provjere vrijednosti naprezanja na boku i u korijenu zuba UVPP zupčanog para izrađen je fotoelastični model UVPP ozubljenja na numerički kontroliranoj glodalici uz prethodni izračun profila zuba putem programa GearPac CX 3.5 [45] i VPP\_Profil [35].

Prilikom eksperimentalnog ispitivanja metodom fotoelasticimetrije uočeno je vrlo dobro podudaranje vrijednosti naprezanja na boku i u korijenu zuba zupčanika dobivenih eksperimentalnim ispitivanjem metodom fotoelasticimetrije s vrijednostima dobivenim putem metode konačnih elemenata.

Metoda konačnih elemenata korištena je za utvrđivanje promjene vrijednosti naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika tijekom zahvata UVPP zupčanih parova te za utvrđivanje raspodjele sile tijekom zahvata UVPP zupčanih parova.

Analizom raspodjele sile tijekom zahvata putem metode konačnih elemenata utvrđeno je da najveća vrijednost sile na zahvatnoj crti UVPP zupčanog para ne prelazi 63 % vrijednosti ukupne sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ , što znači da su zupčanici proračunati pomoću proračuna prema normi ISO 6336 [22] predimenzionirani.

Mjerodavne točke na zahvatnom putu za proračun naprezanja na boku i u korijenu zuba zupčanika nisu točno definirane prema normi ISO 6336 [22] pa je ispitivanjem putem metode konačnih elemenata utvrđeno da su kod proračuna naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika UVPP zupčanog para mjerodavne točka D dvostrukog zahvata za zupčanik s unutarnjim ozubljenjem te točka E dvostrukog zahvata za zupčanik s vanjskim ozubljenjem.

Raspodjela sile tijekom zahvata UVPP zupčanih parova dobivena putem metode konačnih elemenata upotrijebljena je za utvrđivanje primjenjivosti izraza za naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema [49], [48], [52] te izraza za naprezanje na boku zuba zupčanika prema [35], [44], [73].

Na temelju analize raspodjele sile u toku zahvata zupčanika i geometrijskih karakteristika zupčanika, u ovom je radu predložen postupak proračuna naprezanja u korijenu zuba

zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema [49], [48], [52], uz prepostavku da sila u iznosu od 60 %  $F_{bt}$  djeluje u točki zahvata A.

Ovim postupkom dobivene su vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem koje su bitno niže od vrijednosti dobivenih putem proračuna prema normi ISO 6336 [22], a jednake su najvećim vrijednostima naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata B dobivenim putem metode konačnih elemenata, ili nešto veće od njih.

Utvrđeno je i da se naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem može računati i pojednostavljeni uz izraze prema normi ISO 6336 [22], no uz prepostavku da je zupčani par opterećen sa 60 %  $F_{bt}$ . Tako dobivene vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem nešto su veće od stvarnih, no postupak proračuna bitno je ubrzan i pojednostavljen u odnosu na postupak prema [49], [48], [52].

Na temelju analize vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika dobivenih metodom konačnih elemenata i vrijednosti dobivenih izrazom za Hertzovo naprezanje na boku zuba zupčanika prema [35], [44], [73] te raspodjele sile u toku zahvata zupčanika dobivene putem metode konačnih elemenata predložen je postupak proračuna naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.

Prema tom postupku, koristi se izraz iz [35], [44], [73] uz prepostavku da je zupčani par opterećen sa jednom trećinom sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$  za proračun naprezanja na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u točki zahvata A. Za proračun naprezanja u točki zahvata B koristi se izraz iz [35], [44], [73] uz prepostavku da je zupčani par opterećen sa jednom polovinom sile na zahvatnoj crti  $F_{bt}$ . Kako bi se ove vrijednosti uskladile sa vrijednostima dobivenim putem metode konačnih elemenata, uveden je utjecajni faktor zahvatnog kuta  $Z_a$ . Dobivene vrijednosti nešto su veće od onih dobivenih putem metode konačnih elemenata, a mjerodavna je veća izračunata vrijednost.

Svi izrazi navedeni u ovom radu vrijede isključivo za geometrijski absolutno točan profil zuba zupčanika, bez pogrešaka i modifikacija, dok će vrijednosti za stvarno izvedene zupčanike ipak biti nešto drugačije zbog pogrešaka u izradi zupčanika i elastičnih deformacija zupčanika u zahvatu.

Znanstveni doprinos ovog rada sastoji se od analize geometrije UVPP ozubljenja, predloženih postupaka proračuna naprezanja na boku i u korijenu zuba UVPP ozubljenja te softvera za računalni proračun ZupcanikUVPP, čime je postignuto poboljšanje u odnosu na postojeći proračun prema normi ISO 6336.

Dodatni znanstveni doprinos u ovom radu, prema informacijama dostupnim tijekom pisanja ovog rada, predstavlja prvi objavljeni prikaz ispitivanja zupčanog para s unutarnjim VPP ozubljenjem metodom fotoelasticimetrije.

U postupku ispitivanja naprezanja u korijenu i na boku zuba zupčanika metodom fotoelasticimetrije postignut je napredak u odnosu na prethodno objavljene rade [25], [48], [49], [52] korištenjem modela zupčanika u zahvatu opterećenih momentom, za razliku od prethodno primijenjene metode ispitivanja modela zupčanika u kontaktu s metalnim valjkom opterećenim vanjskom silom, ili opterećivanja modela zupčanika valjkom izrađenim od istog fotoelastičnog materijala kao i model zupčanika.

Prilikom analize metodom konačnih elemenata, u ovom radu ispitani su zupčanici u kontaktu, za razliku od rada [35], u kojem je kontakt zamijenjen koncentriranom silom za potrebe proračuna naprezanja u korijenu zuba zupčanika, dok je prilikom proračuna naprezanja na boku zuba zupčanika kontakt bio zamijenjen ekvivalentnim kontinuiranim paraboličnim opterećenjem. Korištenjem zupčanika u kontaktu prilikom ispitivanja metodom konačnih elemenata postignuti su uvjeti sličniji stvarnim uvjetima opterećenja zupčanika.

Daljnja istraživanja UVPP ozubljenja trebala bi obuhvatiti utjecaj odstupanja od teoretski točnog profila i koraka na nosivost UVPP ozubljenja. Potrebno je istražiti toleranciju UVPP ozubljenja na smetnje u zahvatu poput neparalelnosti osi zupčanika te promjene razmaka osi. Zbog nepovoljnih uvjeta kontakta bokova zuba najveći problem kod UVPP ozubljenja predstavlja nosivost boka zuba pa će se tome u budućim istraživanjima tome posvetiti više pažnje.

Kod kosog ozubljenja potrebno je istražiti utjecaj kuta nagiba zuba  $\beta$  na stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_a$  te odrediti optimalni stupanj prekrivanja koraka  $\varepsilon_\beta$  za UVPP ozubljenje. Time će se omogućiti istraživanje nosivosti kosog UVPP ozubljenja putem MKE i detaljan proračun nosivosti kosog UVPP ozubljenja.

## 10. Popis literature

- [1] Alfirević, J., Jecić, S.: *Fotoelasticimetrija*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1992.
- [2] Anderson, N. E., Loewenthal, S. H.: *Efficiency of Nonstandard and High Contact Ratio Involute Spur Gears*, NASA Technical Memorandum 83725, National Aeronautics and Aerospace Administration, Washington D. C., 1984.
- [3] Andrews, J. D.: *A Finite Element Analysis of Bending Stresses induced in External and Internal Involute Spur Gears*, The Journal of Strain Analysis and Engineering Design, Vol. 26. No. 153. (1991), p. 153-163.
- [4] *Ansys User Manual*, Ansys Inc., 2012.
- [5] Basan, R., Franulović, M., Lovrin, N.: *Influence of HCR-Gears Geometric Parameters on Their Load Carrying Capacity and Frictional Losses*, Proceedings of Papers of 48th International Conference of Machine Elements and Mechanisms Departments, Bratislava, 2007., p. 7-14.
- [6] Basan, R., Franulović, M. Križan, B.: *Numerical Model and Procedure for Determination of Stresses in Spur Gear Tooth Flanks*, Mechanical Engineering SI 2008 Proceedings of Papers, Slovak University of Technology, Bratislava 2008.
- [7] Basan, R.: *Zamor i oštećenje materijala boka zuba zupčanika*, doktorska disertacija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka 2009.
- [8] Cameron, P. R.: *An Optimal Gear Design Method for Minimization of Transmission Error and Vibration Excitation*, doktorski rad, The Pennsylvania State University, College Town PA, 2010.

- [9] Coy, J. J., Townsend, D. P., Zaretsky, E. V.: *Gearing*, NASA Reference Publication 1152, National Aeronautics and Space Administration, Washington D. C., 1985.
- [10] Curti, G., Raffa, F. A., Garavelli, D., Baret, C.: *Three-Dimensional Stress Analysis of Thin-Rimmed Gears by the p-FEM Approach*, Proceedings of the MPT'91 JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, Japan, 1991., p. 787-794.
- [11] DIN 3990: *Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern*  
*Teil 1: Einführung und allgemeine Einflussfaktoren*, Beuth-Verlag, Berlin, 1987.  
*Teil 2: Berechnung der Grübchentragfähigkeit*, Beuth-Verlag, Berlin, 1987.  
*Teil 3: Berechnung der Zahnfusstragfähigkeit*, Beuth-Verlag, Berlin 1987.  
*Teil 4: Berechnung der Fresstragfähigkeit*, Beuth-Verlag, Berlin, 1987.  
*Teil 5: Dauerfestigkeitswerte und Werkstoffqualitäten*, Beuth-Verlag, Berlin, 1987.
- [12] Dally, J. W., Riley, W. F., *Experimental Stress Analysis*, McGraw-Hill, International Student Edition, 1990.
- [13] Döbereiner, R. S.: *Trägfähigkeit von Hochverzahnungen geringer Schwingungsanregung*, doktorski rad, TU München, 1998.
- [14] Elkholly, A. H.: *Tooth Load Sharing in High-Contact Ratio Spur Gears*, Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 107 Issue 1 (1985), p. 11-16.
- [15] Esmaeli, M., Subramaniam, A.: *Engine Timing Geartrain Concepts and Proposals for Gear Rattle Noise Reduction in Commercial Vehicles*, Volvo Research Paper, Chalmers University of Technology, Göteborg, 2011.
- [16] Faggioni, M., Samani, F. S., Bertacchi, G., Pellicano, F.: *Dynamic Optimization of Spur Gears*, Mechanism and Machine Theory Vol. 46 (2011) p. 544-557.
- [17] Franulović, M.: *Utjecaj odstupanja koraka na zahvatnoj crti na naprezanja u evolventnom ozubljenju*, magistarski rad, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2003.
- [18] Franulović, M., Križan, B., Lovrin, N.: *Influence of Pitch Errors on Load Distribution on Spur Involute HCR Gears Teeth*, Proceedings of the Design 2004, 8th International Design Conference, Dubrovnik, 2004., p. 1251-1256.
- [19] Franulović, M., Križan, B., Lovrin, N.: *The Influence of Quality Grade and Loading on Load Sharing on HCR Gears*, The Eleventh International Conference on Machine Design and Production, Conference Proceedings, Ankara , 2004.

- [20] Franulović, M., Basan, R., Križan, B: *Kritični položaj zuba HCR zupčanika s obzirom na odstupanja koraka na zahvatnoj crti*, Engineering Review: znanstveni časopis za nove tehnologije u strojarstvu, brodogradnji i elektrotehnici, 28 (2008), 2; p. 1-10.
- [21] Gregov, G., Marunić, G., Glažar, V.: *Naprezanja u korijenu zuba zupčanika s ravnim Zubima određena različitim metodama proračuna*, Engineering Review: znanstveni časopis za nove tehnologije u strojarstvu, brodogradnji i elektrotehnici, 30 (2010), 1; p. 49-61.
- [22] ISO 6336-1: *Calculation of load capacity of spur and helical gears - Basic principles, introduction and general influence factor*, ISO, Geneva, 2006.  
ISO 6336-2: *Calculation of load capacity of spur and helical gears - Calculation of Surface Durability*, ISO, Geneva, 2006.  
ISO 6336-3: *Calculation of load capacity of spur and helical gears - Calculation of Tooth Bending Strength*, ISO, Geneva, 2006.
- [23] ISO 12639: *Graphic technology - Prepress digital data exchange - Tag image file format for image technology (TIFF/IT)*, ISO, Geneva, 2004.
- [24] Johnson, K. L.: *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge 1985.
- [25] Križan, B.: *Analiza naprezanja kod zupčanika s unutarnjim evolventnim ozubljenjem*, magisterski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1981.
- [26] Križan, B., Lovrin, N.: *Some considerations about the load capacity and efficiency of the HCR-gears*, 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris, 1999., p. 329-334.
- [27] Križan, B., Basan, R., Lovrin, N.: *A Contribution to the Optimal Choice of the HCR-Gears Regarding Frictional Losses*, International journal of applied mechanics and engineering (1734-4492) 7 (2002); p. 249-254.
- [28] Križan, B., Lovrin, N., Franulović, M.: *Load Capacity of the Tooth Root in Internal High Transverse Contact Ratio Involute Gearing*, The 17th International Conference on Production Research, Electronic Proceedings, Virginia Polytechnic Institute and State University , 2003.
- [29] Li, S.: *Finite Element Analyses for Contact Strength and Bending Strength of a Pair of Spur Gears with Machining Errors, Assembly Errors and Tooth Modifications*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 42. (2007), p. 88-114.

- [30] Li, S.: *Effect of Addendum on Contact Strength, Bending Strength and Basic Performance Parameters of a Pair of Spur Gears*, Mechanism and Machine Theory Vol. 43. (2008) p. 1557-1584.
- [31] Litvin, L. F., Fuentes, A.: *Gear Geometry and Applied Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [32] Lovrin, N.: *Raspodjela sile u evolventnom ozubljenju s velikim prekrivanjem profila*, Zbornik Tehničkog fakulteta Rijeka, 10 (1989), p. 151-161.
- [33] Lovrin, N.: *Prilog istraživanju naprezanja u evolventnom ozubljenju s velikim stupnjem prekrivanja profila*, magistarski rad, Tehnički fakultet Rijeka, 1989.
- [34] Lovrin, N., Križan, B.: *Photoelastic investigation of tooth root stresses in HCR-gears*, 17th Danubia-Adria Symposium on Experimental Methods in Solid Mechanics, Praha, 2000., p. 195-198.
- [35] Lovrin, N.: *Analiza nosivosti evolventnog ozubljenja s velikim prekrivanjem profila*, doktorska disertacija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2001.
- [36] Lovrin, N., Križan, B., Franulović, M.: *Photoelastic research of the Hertzian stress in HCR-gears*, Proceedings of the Design 2004, 8th International Design Conference, Zagreb, 2004. p. 1309-1314.
- [37] Lovrin, N., Franulović, M., Vrcan, Ž.: *Neka razmatranja o nosivosti unutarnjeg evolventnog ozubljenja s velikim stupnjem prekrivanja profila*, Engineering Review: znanstveni časopis za nove tehnologije u strojarstvu, brodogradnji i elektrotehnici, 29 (2009), 2; p. 53-61.
- [38] Lovrin, N., Križan, B., Vrcan, Ž.: *Photoelastic investigation into stresses in high transverse contact ratio gears*. Transactions of FAMENA. 33 (2009) , 4; p. 31-40.
- [39] MAAG Gear Book, (MAAG Gear Company, Zurich, 1990).
- [40] Marunić, G., Orlić, Ž.: *Utjecaj reznog alata na naprezanja u korijenu zuba unutrašnjeg ozubljenja*, Zbornik Tehničkog fakulteta Rijeka 14 (1994), p. 133-144.
- [41] Munro, R.G. and Yildirim, N.: *Some Measurements of Static and Dynamic Transmission Errors of Spur Gears*, Proceedings of the International Gearing Conference, University of Newcastle upon Tyne (UK), 1994., pp 371-376.
- [42] Murrell, P.W.: *Developments in High Powered Marine Epicyclic Gearing 30000 s.h.p., Prototype Trials Results*, Proceedings of International Symposium on Gearing & Power Transmissions, Vol. II, Tokyo, 1981, pp D-3 (255-260).

- [43] Nikolić, V., Doličanin, Č., Dimitrijević, D.: *Dynamic Model for the Stress and Strain State Analysis of a Spur Gear Transmission*, Strojniški vestnik – Journal of Mechanical Engineering, Vol. 58 No. 1 (2012), p. 56-67.
  - [44] Oberšmit, E.: *Ozubljenja i zupčanici*, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1982.
  - [45] Obsieger, J., Orlić, Ž., Obsieger, B., Lovrin, N.: *GearPac CX 3.5*, programski paket za proračun cilindričnih evolventnih zupčanika, Tehnički fakultet, Rijeka 1992.
  - [46] Obsieger, B.: *Prilog istraživanju nosivosti i triboloških karakteristika sinusoidnog ozubljenja*, doktorska disertacija, Tehnički fakultet, Rijeka, 1993.
  - [47] Oda, S., Miyachika, K., Araki, K.: *Effects of Rim Thickness on Root Stress and Bending Fatigue Strength of Internal Gear Tooth*, Bulletin of JSME, Vol. 27. No. 230 (1984) p. 1759-1764.
  - [48] Oda, S., Miyachika, K.: *Practical Formula for True Root Stress of Internal Spur Gear Tooth*, Bulletin of JSME, Vol. 29. No. 252 (1986) p. 1934-1938.
  - [49] Oda, S., Miyachika, K.: *Root Stress Analysis of Internal Spur Gears by Theory of Elasticity*, Bulletin of JSME, Vol. 29. No. 250 (1986) p. 1287-1293.
  - [50] Oda, S., Miyachika, K., Sayama, T.: *Effects of Rim and Web Thickness on Bending Fatigue Strength of Internal Gear*, Bulletin of JSME, Vol. 29. No. 248 (1986) p. 586-592.
  - [51] Oda, S., Miyachika, K., Shimizu, H.: *Practical Formula for Tooth Deflection of Spur Gear*, Bulletin of JSME, Vol. 29. No. 257 (1986) p. 3905-3910.
  - [52] Oda, S., Miyachika, K.: *Bending Strength of Internal Spur Gears*, Proceedings of the MPT'91 JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, Japan, 1991., p. 781-786.
  - [53] Pedersen, N. L.: *Improving Bending Stress in Spur Gears Using Asymmetric Gears and Shape Optimization*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 45. (2010), p. 1707-1720.
  - [54] Pedrero, J. I., Plezeguelos, M.: *Load Distribution Model Along the Line of Contact for Involute External Gears*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 45. (2010), p. 780-794.
  - [55] Petersen, D.: *Auswirkung der Lastverteilung auf die Zahnräumtragfähigkeit von hoch überdeckenden Stirnradpaarungen*, Dissertation, Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik, Braunschweig, 1989.
  - [56] Podzharov, E., Mazuras, A., Álvarez-Sánchez, J. A.: *Design of High Contact Ratio Spur Gears to Reduce Static and Dynamic Transmission Error*, Ingeniería Mecánica, Vol. 1 (2003), p. 85-90.
-

- [57] Polder, J. W.: *Overcut, a New Theory for Tip Interference in Internal Gears*, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 11. No. 6. (1969), p. 583-591
- [58] Ramesh, K.: *Digital Photoelasticity*, Springer Science & Business Media, New York 2001.
- [59] Raptis, K.G., Costopoulos, T.N., Papadopoulos, G.A.: *Rating of Spur Gear Strength Using Photoelasticity and the Finite Element Method*, American Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol. 3. Issue 1. (2010), p. 222-231.
- [60] Sánchez, M. B., Pedrero, J. I., Plezeguelos, M.: *Contact Stress Calculation of High Transverse Contact Ratio Spur and Helical Gear Teeth*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 64. (2013), p. 93-110.
- [61] Sciammarella, C. A., Sciammarella, F. M.: *Experimental Mechanics of Solids*, John Wiley & Sons, Chichester 2012.
- [62] Seneczko, M.: *Mechanical Components in the News*, Machine Design, Vol. 53 No. 14, 2-5, 1981.
- [63] Sharpe, W. N. Jr., Sharpe, W. N.: *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*, Springer Science & Business Media, New York 2008.
- [64] Srinivasan, N., Shunmugam, M. S.: *Limiting Conditions in Gear Shaping for Corrected Involute Gears*, International Journal of Machine Tool Designer Resources, Vol. 2. No. 4. (1983) p. 227-235.
- [65] Stachowiak, G. W., Batchelor, A. W.: *Engineering Tribology*, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [66] Terauchi, Y., Nagamura, K.: *On Tooth Deflection Calculation and Profile Modification of Spur Gear Teeth*, International Symposium on Gearing & Power Transmissions, Proc. Vol II, pp C-27, 159-164, Tokyo, 1981.
- [67] Tsai, M. – H., Tsai, Y. – C.: *Design of High Contact Ratio Spur Gears Using Quadratic Parametric Tooth Profiles*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 33 (1998), p. 551-564.
- [68] Tůma, J.: *Dynamic Transmission Error Measurements*, Engineering Mechanics, Vol. 13 No. 2 (2006), p. 101-106.
- [69] Villars, F.: *Calcul d'engrenages en developpante non standards pour l'automobile*, Proceedings of the 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris (France), 1999., Vol. I, pp. 43-51.

- [70] Vrcan, Ž., Lovrin, N., Križan, B.: *Some Considerations on the Geometry of High Transverse Contact Ratio Internal Gears*, International Conference on Innovative Technologies IN-TECH 2011 Proceedings, Bratislava 2011, p. 579-582.
- [71] Vrcan, Ž., Lovrin, N., Križan, B.: *A Contribution to the Calculation of the Loading Capacity of Internal High Contact Ratio Gears*, Proceedings of The Seventh International Symposium "KOD 2012", Novi Sad, Serbia , 2012., p. 309-316.
- [72] Vulgakov, Z. B.: *Avionski zupčasti prijenosnici i reduktori* (na ruskom), Mašinostroenie, Moskva, 1981.
- [73] Weber, C., Banaschek, K., *Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern*, Verein Deutscher Maschinenbau-Anstalten e. V., Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1953.
- [74] Winter H., Podlesnik, B.: *Zahnfedersteifigkeit von Stirnradpaaren*  
*Teil 1: Grundlagen und bisherige Untersuchungen*, Antriebstechnik, 22 (1983) Nr. 3, S. 39-42.  
*Teil 2: Einfluss von Verzahnungsdaten, Radkörperform, Linielast und Wellen-Naben-Verbindung*, Antriebstechnik 22 (1983) Nr. 5, S. 51-58.  
*Teil 3: Einfluss der Radkörperform auf die Verteilung der Einzelfedersteifigkeit und der Zahnkraft längs der Zahnbreite*, Antriebstechnik 23 (1984) Nr. 11, S. 43-49.
- [75] Xu, H.: *Development of a Generalized Mechanical Efficiency Prediction Methodology for Gear Pairs*, doktorska disertacija, Ohio State University, 2005.
- [76] Yeh, T., Yang, D. C. H., Tong, S.-H.: *Design of New Tooth Profiles for High-load Capacity Gears*, Mechanism and Machine Theory Vol. 36. (2001), p. 1105-1120.
- [77] Ziegler, P., Eberhard, P.: *Simulation of Gear Hammering With a Fully Elastic Model*, Non – smooth Problems in Vehicle System Dynamics, Springer Verlag, Berlin, 2010., pp. 195-207.

## 11. Popis oznaka i indeksa

### Oznake

- A početak prvog trostrukog zahvata  
A faktor za izračunavanje naprezanja u korijenu, -  
 $A_a$  faktor za izračunavanje naprezanja u korijenu, -  
 $A_b$  faktor za izračunavanje naprezanja u korijenu, -  
 $A_c$  faktor za izračunavanje naprezanja u korijenu, -  
 $a$  razmak osi, mm  
 $a_{nt}$  faktor koncentracije normalnog naprezanja zbog djelovanja tangencijalne komponente sile  $F_{bt}$ , -  
 $a_{nr}$  faktor koncentracije normalnog naprezanja zbog djelovanja radikalne komponente sile  $F_{bt}$ , -  
 $a_{nd}$  faktor koncentracije normalnog naprezanja na tlak zbog djelovanja radikalne komponente sile  $F_{bt}$ , -  
 $a_{z0}$  razmak osi rezognog zupčanika i izradka prilikom izrade zupčanika, mm  
B početak prvog dvostrukog zahvata  
 $b$  širina zupčanika, mm  
 $b$  debljina fotoelastičnog modela, mm  
 $b_H$  dužina Hertzovog dodira, mm  
C kinematski pol zahvata  
 $c$  tjemena zračnost zupčanika, mm
-

$c^*$	faktor tjemene zračnosti zupčanika, -
$c_0$	tjemena zračnost alata, mm,
$c_0^*$	faktor tjemene zračnost alata, -
$c'$	pojedinačna krutost jednog para zuba u zahvatu, $\frac{\text{Nmm}^{-1}}{\mu\text{m}}$
D	početak drugog trostrukog zahvata
D	krajnja točka prijelazne krivulje korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem (slika 4.2)
$d$	promjer (bez indeksa diobena kružnica), mm
$d_e$	promjer hvatišta sile, mm
$E$	modul elastičnosti, MPa
$E$	udaljenost središta zakrivljenosti krivulje korijena osnovnog profila zupčanika od simetrale, mm
$E^*$	reducirani modul elastičnosti, MPa
E	početak drugog dvostrukog zahvata
F	početak trećeg trostrukog zahvata
$F_{bt}$	ukupna sila na zahvatnoj crti, N
$F_{bti}$	sila na zahvatnoj crti u pojedinoj točki zahvata, N
$F_D$	sila na dinamometru, N
$F_t$	obodna sila na diobenoj kružnici, N
$F_{wt}$	obodna sila na kinematskoj kružnici, N
$f_\sigma$	fotoelastična konstanta, $\text{N mm}^{-1}$
G	završetak trećeg trostrukog zahvata
$G$	pomoćna vrijednost, -
$g$	trenutna dužina zahvata od točke A do određene točke unutar ukupne dužine zahvata, mm
$g_a$	ukupna dužina zahvata od točke A do točke G, mm
$g_\beta$	duljina dodirnog luka boka zuba, mm
$H$	pomoćna vrijednost, -
$h_{a0}$	visina glave zuba alata, mm
$h_{a0}^*$	faktor visine glave zuba alata, -
$h_{aP}$	visina glave zuba osnovnog profila, mm
$h_{aP}^*$	faktor visine glave zuba osnovnog profila, -

---

$h_{fp}$	visina korijena zuba osnovnog profila, mm
$h_{fp}^*$	faktor visine korijena zuba osnovnog profila, -
$h_F$	krak savijanja, mm
$h_{Fe}$	efektivni krak savijanja, mm
$h$	ukupna visina zuba zupčanika (za određivanje debljine vijenca zupčanika), mm
$h_0$	udaljenost središta zakrivljenosti vrha glave zuba rezognog zupčanika od diobene kružnice rezognog zupčanika, mm
$h_Y$	krak savijanja u proizvoljnoj točki na zahvatnom putu zupčanika Y, mm
$l_{MO}$	referentni krak sile, mm
$l_0$	duljina luka mjerenoj na diobenoj kružnici zupčanika s unutarnjim ozubljenjem između središta međuprostora korijena i središta zakrivljenosti vrha rezognog zupčanika, mm
$M$	moment savijanja, Nm ili Nmm
$M_i$	pomoćni izrazi za izračunavanje $Z_B$ i $Z_D$ , -
$m$	modul, mm
$m_{n0}$	modul rezognog zupčanika, mm
$N_{iz}$	red izokrome, -
$n$	brzina vrtnje, $\text{min}^{-1}$
$O$	središte zupčanika
$p_e$	korak zahvata na zahvatnoj crti, mm
$p_t$	korak zahvata u čeonom presjeku, mm
$R$	polumjer točke na prijelaznoj krivulji korijena, mm
$r$	polumjer (diobena kružnica bez indeksa), mm
$r_d$	krak sile opterećenja fotoelastičnog modela, mm
$s_{Fn}$	širina zuba u kritičnom presjeku, mm
$s_{MO}$	referentna širina zuba, mm
$s_R$	debljina vijenca zupčanika, mm
$T$	okretni moment koji djeluje na zupčanik, Nm
$T$	točka tangente zahvatne crte na temeljnu kružnicu
$t_e$	vrijeme opterećivanja probne epruvete, s
$u$	omjer broja zuba zupčanika, -
$v_H$	deformacija jednog od dva tijela u kontaktu, -
$x$	faktor pomaka profila, -

---

$X, Y$	koordinate točke na krivulji korijena, mm
$X_0, Y_0$	koordinate središta zakriviljenosti vrha reznog zupčanika, mm
$Y$	trenutna točka zahvata
$Y_B$	faktor debljine vijenca, -
$Y_{DT}$	faktor stupnja prekrivanja, -
$Y_F$	faktor oblika zuba, -
$Y_S$	faktor korekcije naprezanja, -
$Y_{FS}$	efektivni faktor oblika zuba, -
$Y_z$	udaljenost vrha glave zuba zupčanika, mm
$Y_0$	udaljenost vrha glave zuba reznog zupčanika, mm
$Y_\beta$	faktor kuta nagiba zuba, -
$Y_\epsilon$	faktor stupnja prekrivanja prema normi DIN 3990, -
$y$	udaljenost točke zahvata od simetrale zuba zupčanika, mm
$Z_B$	faktor korekcije za mali zupčanik, -
$Z_D$	faktor korekcije za veliki zupčanik, -
$Z_E$	faktor elastičnosti, -
$Z_H$	faktor zone, -
$Z_a$	faktor zahvatnog kuta, -
$Z_\beta$	faktor kuta nagiba zuba, -
$Z_\epsilon$	faktor prekrivanja, -
$z$	broj zuba zupčanika, -
$\alpha$	zahvatni kut, °
$\alpha_A$	zahvatni kut na vrhu zuba zupčanika, °
$\alpha_{en}$	pomoćni kut, °
$\alpha_F$	kut djelovanja sile, °
$\alpha_{Fen}$	kut djelovanja sile, °
$\alpha_n$	zahvatni kut u normalnom presjeku, °
$\alpha_P$	kut zahvata ili kut profila, °
$\alpha_w$	pogonski kut zahvata, °
$\alpha_Y$	trenutni kut zahvata u točki zahvata $Y$ , °
$\alpha_0$	zahvatni kut reznog zupčanika, °
$\beta$	kut nagiba zuba, °
$\beta_b$	kut nagiba zuba na temeljnem krugu, °

$\gamma_e$	pomoćni kut zahvata, °
$\gamma_{z0}$	kut skošenja rezognog zupčanika, °
$\Delta a$	relativna promjena razmaka osi zupčanika, -
$\Delta \varepsilon_a$	relativna promjena stupnja prekrivanja profila, -
$\delta$	ukupna deformacija zuba zupčanika, μm
$\delta_e$	debljina probne epruvete, mm
$\delta_H$	Hertzova deformacija u točki dodira, μm
$\delta_{RK}$	elastična deformacija tijela zupčanika, μm
$\delta_Z$	elastična deformacija jednog zuba, μm
$\varepsilon_\gamma$	stupanj prekrivanja zupčanog para, -
$\varepsilon_a$	stupanj prekrivanja profila, -
$\varepsilon_\beta$	stupanj prekrivanja koraka, -
$\Theta$	kut između simetrale zuba i pravca djelovanja sile $F_{bt}$ , rad
$\Theta_{MO}$	kut simetrale zuba unutarnjeg ozubljenja i tangente na prijelaznu krivulju korijena, rad
$\Theta_{z0}$	kut nagiba vrha glave zuba rezognog zupčanika, rad
$\Theta_z$	kut zakretanja zupčanika prilikom izrade, rad
$\Theta_z'$	kut zakretanja točke P na boku zuba zupčanika (za interferenciju), rad
$\Theta_0$	kut zakretanja rezognog zupčanika prilikom izrade zupčanika, rad
$\Theta_0'$	kut zakretanja točke P na boku rezognog zupčanika (za interferenciju), rad
$\lambda$	valna duljina svjetlosti, nm
$\nu$	Poissonov broj, -
$\theta$	pomoćni kut, rad
$\theta$	kut između simetrale zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem i tangente na prijelaznu krivulju korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem, rad
$\rho$	polumjer zakrivljenosti boka zuba u točki dodira, mm
$\rho_{a0}$	zaobljenje vrha glave zuba alata, mm
$\rho_{a0}^*$	faktor zaobljenja vrha glave zuba alata, mm
$\rho_F$	polumjer zakrivljenosti prijelazne krivulje korijena zuba u kritičnom presjeku, mm
$\rho_{fp}$	polumjer zakrivljenosti korijena osnovnog profila zuba, mm
$\rho_{fp}^*$	faktor polumjera zakrivljenosti korijena osnovnog profila zuba, mm
$\rho_{fpv}$	računski polumjer zakrivljenosti korijena osnovnog profila zuba, mm

$\rho_{MO}$	polumjer zakrivljenosti prijelazne krivulje korijena profila zuba u kojoj tangente na krivulju leže pod $45^\circ$ na simetralu zuba, mm
$\rho_Y$	polumjer zakrivljenosti boka zuba u trenutnoj točki zahvata Y, mm
$\Sigma x$	suma faktora pomaka profila, -
$\sigma$	naprezanje, MPa
$\sigma_1, \sigma_2$	glavna naprezanja, MPa
$\sigma_x, \sigma_y$	glavna naprezanja u smjeru koordinatnih osi, MPa
$\sigma_{F0}$	nazivno naprezanje u korijenu zuba, MPa
$\sigma_H$	efektivno Hertzovo naprezanje na boku zuba, MPa
$\sigma_{H0}$	nazivno Hertzovo naprezanje na boku zuba, MPa
$\sigma_{bt}$	normalno naprezanje zbog savijanja tangencijalnom komponentom sile $F_{bt}$ , MPa
$\sigma_{br}$	normalno naprezanje zbog savijanja radijalnom komponentom sile $F_{bt}$ , MPa
$\sigma_{dr}$	normalno tlačno naprezanje zbog djelovanja radijalne komponente sile $F_{bt}$ , MPa
$\sigma_r$	normalno naprezanje zbog djelovanja radijalne komponente sile $F_{bt}$ , MPa
$\sigma_{fn}$	ukupno normalno naprezanje u korijenu zuba zupčanika, MPa
$v$	kut između koordinatne osi y i pravca koji prolazi kroz krajnju točku prijelazne krivulje korijena D, rad
$\tau_n$	smično naprezanje, MPa
$\tau_3$	glavno smično naprezanje, MPa
$\varphi$	kut zakretanja vrha rezognog zupčanika, rad
$\psi_{bd}$	faktor širine zuba zupčanika, -

## Indeksi

0	alat
1	zupčanik s vanjskim ozubljenjem
2	zupčanik s unutarnjim ozubljenjem
0,6	0,6 sile $F_{bt}$
*	oznaka faktora za pripadajuće veličine izražene u dijelovima modula $m_n$
(bez)	diobena kružnica
a	kružnica preko glave zuba
A	u točki zahvata A

- B u točki zahvata B  
b temeljna kružnica  
f kružnica preko korijena zuba  
H bok zuba  
HZ prema Hertzovom izrazu  
i točka na zahvatnoj crti unutar puta zahvata od točke A do točke G  
ISO prema ISO normi  
j zupčanik s vanjskim (j=1), odnosno unutarnjim ozubljenjem (j=2)  
K korigirano  
max maksimum  
MKE metoda konačnih elemenata  
MO Miyachika-Oda  
n normalni presjek  
sred srednje  
t čelni presjek  
w kinematska kružnica  
Y trenutna točka zahvata  
z zupčanik

## 12. Popis slika i tablica

### Slike

1.1 Zahvat zupčanika [35]. Lijevo: NPP zupčanici. Desno: VPP zupčanici.....	2
1.2 Hipotetska raspodjela sile u zahvatu. Lijevo: NPP par. Desno: VPP par. ....	2
2.1 VPP zupčani par s vanjskim ozubljenjem [35] .....	7
2.2 VPP zupčani par s unutarnjim ozubljenjem [37] .....	8
2.3 Geometrija reznog zupčanika prema [64]. .....	9
2.4 Lijevo: prikaz interferencije vrha. Desno: geometrijsko objašnjenje interferencije vrha.	10
2.5 Lijevo: prikaz interferencije trohoide. Desno: geometrijsko objašnjenje interferencije trohoide. ....	11
2.6 Lijevo: interferencija prilikom primicanja i odmicanja alata. Desno: geometrijsko objašnjenje interferencije prilikom primicanja i odmicanja alata. ....	12
2.7 Utjecaj promjene zahvatnog kuta $\alpha_n$ na stupanj prekrivanja profila $\varepsilon_a$ .....	17
2.8 Utjecaj promjene faktora visine glave zuba alata $h_{a0}^*$ na stupanj prekrivanja profila $\varepsilon_a$ ..	18
2.9 Utjecaj promjene omjera broja zuba $u$ na stupanj prekrivanja profila $\varepsilon_a$ .....	18
2.10 Utjecaj promjene faktora pomaka profila zupčanika $x_1, x_2$ na stupanj prekrivanja profila $\varepsilon_a$ za $x_1 = x_2$ .....	19

2.11 Utjecaj promjene faktora pomaka profila $x_1, x_2$ na stupanj prekrivanja profila $\varepsilon_a$ za $\Sigma x = 0, x_1 < 0$ .....	20
2.12 Utjecaj promjene faktora pomaka profila $x_1, x_2$ na stupanj prekrivanja profila $\varepsilon_a$ za $\Sigma x = 0, x_1 > 0$ .....	20
2.13 Relativna promjena razmaka osi zupčanika $\Delta a$ za promatrane parove u ovisnosti o kutu nagiba boka zuba $\beta$ .....	23
2.14 Relativna promjena stupnja prekrivanja profila $\Delta \varepsilon_a$ za promatrane zupčane parove u ovisnosti o kutu nagiba boka zuba $\beta$ .....	24
2.15 Ovisnost stupnja prekrivanja koraka $\varepsilon_\beta$ o broju zuba zupčanika $z$ za $\beta = 8^\circ$ .....	25
2.16 Ovisnost stupnja prekrivanja koraka $\varepsilon_\beta$ o broju zuba zupčanika $z$ za $\beta = 12^\circ$ .....	25
2.17 Ovisnost stupnja prekrivanja koraka $\varepsilon_\beta$ o broju zuba zupčanika $z$ za $\beta = 20^\circ$ .....	26
2.18 Ovisnost stupnja prekrivanja koraka $\varepsilon_\beta$ o broju zuba zupčanika $z$ za $\beta = 30^\circ$ .....	26
2.19 Ovisnost stupnja prekrivanja koraka $\varepsilon_\beta$ o broju zuba zupčanika $z$ za $\beta = 45^\circ$ .....	27
3.1 Polumjeri zakrivljenosti u točkama na bokovima zuba zupčanika zupčanog para s vanjskim ozubljenjem [22] .....	31
3.2 Polumjeri zakrivljenosti u točkama na bokovima zuba zupčanika zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem [22] .....	31
3.3 Profil zuba vanjskog ozubljenja i veličine potrebne za izračunavanje faktora oblika za vanjsko ozubljenje [22].....	34
3.4 Profil zuba unutarnjeg ozubljenja i veličine potrebne za izračunavanje faktora oblika za unutarnje ozubljenje [22] .....	34
3.5 Osnovni profil zupčanika [22].....	35
3.6 Veličine potrebne za izračunavanje faktora debljine vijenca. Lijevo: vanjsko ozubljenje. Desno: unutarnje ozubljenje. ....	39
4.1 Dijelovi profila zuba unutarnjeg ozubljenja.....	42
4.2 Koordinatni sustav za izračunavanje položaja točke na prijelaznoj krivulji korijena zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema [49], [48], [52] .....	43

---

4.3 Mjerodavne veličine za proračun naprezanja prema [49] .....	46
4.4 Deformacija zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem $\delta_Z$ .....	52
4.5 Deformacija tijela zupčanika s unutarnjim ozubljenjem $\delta_{RK}$ .....	52
4.6 Hertzova deformacija kontaktnog područja $\delta_H$ .....	53
4.7 Zahvatna crta UVPP zupčanog para.....	54
4.8 Polumjeri zakrivljenosti u točkama zahvata za UVPP ozubljenje .....	56
4.9 Deformacija zuba UVPP zupčanog para na početku dvostrukog zahvata B – E .....	57
4.10 Deformacija zuba UVPP zupčanog para na početku trostrukog zahvata A – D – F.....	58
4.11 Dijagram toka proračuna naprezanja na boku zuba zupčanika VPP i NPP ozubljenja prema normi ISO 6336 .....	63
4.12 Dijagram toka proračuna naprezanja u korijenu zuba za NPP i VPP ozubljenje prema normi ISO 6336.....	64
4.13 Dijagram toka proračuna naprezanja u korijenu zuba prema [49], [48], [52].....	65
4.14 Dijagram toka proračuna naprezanja na boku zuba prema [24], [35], [55], [73].....	65
5.1 Dvodimenzionalni geometrijski modeli zupčanika u zahvatu .....	74
5.2 Element PLANE 183.....	75
5.3 Elementi TARGE 169 i CONTA 172 .....	75
5.4 Primjer umrežavanja modela zupčanika .....	76
5.5 Postavljanje kontaktnih elemenata .....	76
5.6 Zakretanje modela zupčanika u željenu točku zahvata .....	77
5.7 Rubni uvjeti .....	78
6.1 Naprava za opterećivanje fotoelastičnog modela.....	82
7.1 Početak trostrukog zahvata: A – B ( $g/p_{et} = 0$ ), D – E ( $g/p_{et} = 1$ ), F – G ( $g/p_{et} = 2$ ). Materijal: Araldit B, $F_{bt} = 1920$ N, $\varepsilon_a = 2,306$ . ....	86
7.2 Unutrašnjost trostrukog zahvata: A – B ( $g/p_{et} = 0,153$ ), D – E ( $g/p_{et} = 1,153$ ), F – G ( $g/p_{et} = 2,153$ ). Materijal: Araldit B, $F_{bt} = 1920$ N, $\varepsilon_a = 2,306$ . ....	87
7.3 Završetak trostrukog zahvata: A – B ( $g/p_{et} = 0,306$ ), D – E ( $g/p_{et} = 1,306$ ),	

---

F – G ( $g/p_{et} = 2,306$ ). Materijal: Araldit B, $F_{bt} = 1920$ N, $\varepsilon_a = 2,306$ .	88
7.4 Početak dvostrukog zahvata: B – D ( $g/p_{et} = 0,306$ ), E – F ( $g/p_{et} = 1,306$ ). Materijal: Araldit B, $F_{bt} = 1920$ N, $\varepsilon_a = 2,306$ .	89
7.5 Unutrašnjost dvostrukog zahvata: B – D ( $g/p_{et} = 0,653$ ), E – F ( $g/p_{et} = 1,653$ ). Materijal: Araldit B, $F_{bt} = 1920$ N, $\varepsilon_a = 2,306$ .	90
7.6 Završetak dvostrukog zahvata: B – D ( $g/p_{et} = 0,653$ ), E – F ( $g/p_{et} = 1,653$ ). Materijal: Araldit B, $F_{bt} = 1920$ N, $\varepsilon_a = 2,306$ .	91
7.7 Naprezanje u korijenu zuba fotoelastičnog modela zupčanika s unutarnjim ozubljenjem. Materijal: Araldit B, $F_{bt} = 1920$ N, $\varepsilon_a = 2,306$ .	92
7.8 Naprezanje u korijenu zuba fotoelastičnog modela zupčanika s vanjskim ozubljenjem. Materijal: Araldit B, $F_{bt} = 1920$ N, $\varepsilon_a = 2,306$ .	93
7.9 Naprezanje na boku zuba fotoelastičnog modela zupčanika. Materijal: Araldit B, $F_{bt} = 1920$ N, $\varepsilon_a = 2,306$ .	94
7.10 Raspodjela sile u zahvatu zuba fotoelastičnog modela zupčanog para s vanjskim ozubljenjem. Materijal: Araldit B, $F_{bt} = 1920$ N, $\varepsilon_a = 2,306$ .	95
8.1 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 0	99
8.2 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 1	100
8.3 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 2	101
8.4 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 3	102
8.5 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 4	103
8.6 Raspodjela sile tijekom zahvata zupčanog para 5	104
8.7 Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 6	105
8.8 Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 7	106
8.9 Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 8	107
8.10 Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 9	107
8.11 Raspodjela sile u tijeku zahvata zupčanog para 10	108
8.12 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom	

---

zahvata zupčanog para 0 .....	110
8.13 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 0 .....	110
8.14 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 1 .....	111
8.15 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 1 .....	112
8.16 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 2 .....	113
8.17 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 2 .....	113
8.18 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 3 .....	114
8.19 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 3 .....	115
8.20 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 4 .....	116
8.21 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 4 .....	116
8.22 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 5 .....	117
8.23 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem u tijeku zahvata zupčanog para 5 .....	118
8.24 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 6 .....	119
8.25 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 6 .....	119

---

8.26 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 7 .....	120
8.27 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 7 .....	121
8.28 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem u tijeku zahvata zupčanog para 8 .....	122
8.29 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 8 .....	122
8.30 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 9 .....	123
8.31 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 9 .....	124
8.32 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 10 .....	125
8.33 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s vanjskim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 10 .....	125
8.34 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 0 .....	127
8.35 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 1 .....	128
8.36 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 2 .....	129
8.37 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 3 .....	130
8.38 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata para 4 .....	131
8.39 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 5 .....	133
8.40 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 6 .....	134
8.41 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 7 .....	134
8.42 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 8 .....	136
8.43 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 9 .....	137
8.45 Naprezanje na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 10 .....	138

---

8.46 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 0 .....	140
8.47 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 1 .....	141
8.48 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 2 .....	142
8.49 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 3 .....	143
8.50 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 4 .....	144
8.51 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 5 .....	145
8.52 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 6 .....	146
8.53 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 7 .....	147
8.54 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 8 .....	148
8.55 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 9 .....	149
8.56 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem tijekom zahvata zupčanog para 10 .....	150
8.57 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 0 .....	153
8.58 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 0 .....	154
8.59 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 1 .....	155

---

8.60 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 1 .....	155
8.61 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 2 .....	156
8.62 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 2 .....	157
8.63 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 3 .....	158
8.64 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 3 .....	158
8.65 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 4 .....	159
8.66 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 4 .....	160
8.67 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 5 .....	161
8.68 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 5 .....	161
8.69 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 6 .....	162
8.70 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 6 .....	162
8.71 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 7 .....	163
8.72 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 7 .....	164
8.73 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 8 .....	165
8.74 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 8 .....	165
8.75 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 9 .....	166
8.76 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 9 .....	167
8.77 Promjena relativnog polumjera zakriviljenosti bokova zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 10 .....	168

---

8.78 Vrijednosti naprezanja na boku zuba zupčanika tijekom zahvata zupčanog para 10 .... 168

## Tablice

2.1 Geometrijski podaci za zupčane parove s ravnim zubima [70] .....	16
2.2 Osnovni podaci za zupčane parove s kosim zubima .....	21
4.1 Ulazni podaci za primjer rada softvera ZupcanikUVPP .....	66
4.2 Vrijednosti $ \overline{T_1G} $ , $ \overline{T_2A} $ , $ \overline{T_1T_2} $ , $ \overline{AG} $ i $p_e$ .....	67
4.3 Vrijednosti $ \overline{AB} $ , $ \overline{AD} $ , $ \overline{AE} $ i $ \overline{AF} $ .....	67
4.4 Određivanje položaja točaka A, B, D, E, F i G uzduž zahvatne crte .....	67
4.5 Vrijednosti uz proračun naprezanja u korijenu i na boku zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem prema normi ISO 6336.....	68
4.6 Parametri potrebni za izračunavanje koordinata točke u kojoj tangenta na prijeznu krivulju korijena zuba zatvara kut od $45^\circ$ sa simetralom zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem.....	69
4.7 Naprezanje u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema [49], [48], [52] u pojedinim točkama zahvata .....	70
4.8 Naprezanje na boku zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem prema [24], [35], [55], u pojedinim točkama zahvata .....	71
7.1 Parametri geometrije zupčanog para za fotoelastično ispitivanje .....	85
7.2 Materijalni parametri za Araldit B .....	91
8.1 Parametri geometrije zupčanih parova 0 - 3 za analizu metodom konačnih elemenata ..	97
8.2 Parametri geometrije zupčanih parova 4 - 7 za analizu metodom konačnih elemenata ..	97
8.3 Parametri geometrije zupčanih parova 8 - 10 za analizu metodom konačnih elemenata	98
8.4 Omjer sile $F_{bt1}$ i ukupne sile na zahvatnoj crti $F_{bt}$ u točkama zahvata u kojima se pojavljuje najveća vrijednost naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem pri djelovanju najveće sile $F_{bt4}$ .....	151

---

8.5 Vrijednosti naprezanja u korijenu zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem za različite postupke izračuna pri djelovanju sile $F_{bt4}$ .....	151
8.6 Vrijednosti naprezanja u točkama zahvata A i B dobivene putem MKE i predloženih izraza (8.1) i (8.2) za naprezanje na boku zuba zupčanika pri djelovanju najveće sile $F_{bt4}$ .....	170
8.7 Vrijednosti naprezanja u točkama zahvata A i B dobivene putem MKE i korigiranih izraza (8.4 i 8.5) za naprezanje na boku zuba zupčanika pri djelovanju najveće sile $F_{bt4}$ .....	171

## 13. Životopis

Željko Vrcan je rođen u Rijeci 9. svibnja 1982. godine.

Prvu sušačku hrvatsku gimnaziju u Rijeci završava 2000. godine.

Sveučilišni studij strojarstva završio je na Tehničkom fakultetu u Rijeci 8. prosinca 2006.

2007. godine radi u brodogradilištu „3. maj“ u Rijeci kao projektant u Uredu cijevnih sistema.

Krajem iste godine prelazi na Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, gdje se zapošljava kao znanstveni novak na projektu 069-0692195-1796, „Materijali, trajnost i nosivost suvremenih zupčastih prijenosnika“, glavnog istraživača red. prof. dr. sc. Božidara Križana.

Na Zavodu za konstruiranje u strojarstvu izvodi vježbe iz predmeta Konstrukcijski elementi 1 i Konstrukcijski elementi 2 na preddiplomskom sveučilišnom studiju strojarstva; Elementi transportne tehnike, Mehanički prijenosnici snage i Brodski palubni strojevi na diplomskom sveučilišnom studiju strojarstva; Elementi strojeva 2 na stručnom studiju strojarstva, te Elementi strojeva BG na stručnom studiju brodogradnje.

Stručno se usavršavao na University of Debrecen, Department of Mechanical Engineering; FH Joanneum, Graz; Fakultetu strojarstva i brodogradnje sveučilišta u Zagrebu te na Fakultetu strojarstva, elektrotehnike i brodogradnje sveučilišta u Splitu.

Član je Tehničkih odbora TO 529 i TO 530 Hrvatskog zavoda za normizaciju.

Do sada je u koautorstvu objavio 16 znanstvenih radova. Govori engleski i talijanski jezik.

## Popis objavljenih rada

### 1. Radovi objavljeni u časopisima indeksiranim u CC/SCI/SCIE

- [1] Gregov, G.; Lovrin, N.; Vrcan, Ž.: *Volume and Mass Comparison of Two-stage Coaxial Reduction Gears with Single-stage and Two-stage Planetary Reduction Gears*, Transactions of FAMENA (1333-1124) Vol. 34 No. 1 (2010), Zagreb, Hrvatska, pp. 59-70. /SCIE
- [2] Lovrin, N.; Križan, B.; Vrcan, Ž.: *Photoelastic investigation into stresses in high transverse contact ratio gears*, Transactions of FAMENA (1333-1124) Vol. 33 No. 4 (2009), Zagreb, Hrvatska, pp. 31-40. /SCIE
- [3] Lovrin, N.; Vrcan, Ž.: *Some Considerations About Engineering Ethics*, Strojarstvo: časopis za teoriju i praksu u strojarstvu, Vol. 51, No.3 (2009), Zagreb, Hrvatska, pp. 239-248. /CC
- [4] Vrcan, Ž.; Lovrin, N.: *Genetic algorithm based optimisation of conveyor belt material cross section area*, Tehnički vjesnik : znanstveno-stručni časopis tehničkih fakulteta Sveučilišta u Osijeku. Vol. 17, No. 2 (2010), Osijek, Hrvatska, pp. 137-143. /SCIE

### 2. Radovi objavljeni u ostalim časopisima s međunarodnom recenzijom

- [1] Lovrin, N.; Franulović, M.; Vrcan, Ž.: *Neka razmatranja o nosivosti unutarnjeg evolventnog ozubljenja s velikim stupnjem prekrivanja profila*, Engineering review : znanstveni časopis za nove tehnologije u strojarstvu, brodogradnji i elektrotehnici, Vol. 29 No. 2 (2009) Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, Hrvatska, pp. 53-61.
- [2] Vrcan, Ž.; Lovrin, N.; Gregov, G.: *Primjene stroboskopa*, Engineering Review: znanstveni časopis za nove tehnologije u strojarstvu, brodogradnji i elektrotehnici, Vol. 29, No. 1, (2009), Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, Hrvatska, 2009, pp. 95-106.
- [3] Vrcan, Ž.; Siminati, D.; Lovrin, N.: *Design Proposal of a Hydrostatic City Bus Transmission*, Engineering review : znanstveni časopis za nove tehnologije u strojarstvu, brodogradnji i elektrotehnici, Vol. 31, No. 2 (2011), Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, Hrvatska, pp. 81-89.

### 3. Radovi objavljeni u zbornicima radova s međunarodnom recenzijom

- [1] Basan, R.; Vrcan, Ž.; Lengauer, M.; Franulović, M.; Trausmuth, A.: *Modelling of Tribological Conditions During the Mesh of Gear Teeth*, 3rd Fatigue Symposium Leoben Conference Transcript, Montanuniversität Leoben, Chair of Mechanical Engineering, Leoben, 2012., pp. 268-278.
- [2] Lovrin, N.; Vrcan, Ž.: *Some Ethical Aspects of Cheap Products Made In China*, 5th International Scientific Conference Management of Technology – Step to Sustainable Production Proceedings, Croatian Association for PLM, Zagreb, 2013.
- [3] Lovrin, N.; Vrcan, Ž.: *Engineering Ethics for the 21st Century*, 3rd International Scientific Conference Management of Technology Step to Sustainable Production MOTSP 2011 Conference Proceedings, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, Zagreb, 2011., pp. 535-542.
- [4] Lovrin, N.; Vrcan, Ž.: *Energy Saving in Modern Gearboxes using HCR Gears*, MOTSP 2010 International Scientific Conference - Management of Technology – Step to Sustainable Production Conference Proceedings, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, Zagreb, 2010.
- [5] Lovrin, N.; Vrcan, Ž.: *Role of Ethics in Engineering Design*, XII International Conference on Mechanical Engineering Proceedings 2008, Slovak University of Technology, Bratislava, 2008., pp. III-25-III-27.
- [6] Vrcan, Ž.; Lovrin, N.; Križan, B.: *A Contribution to the Calculation of the Loading Capacity of Internal High Contact Ratio Gears*, Proceedings - The Seventh International Symposium "KOD 2012", Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Serbia, 2012., pp. 309-316.
- [7] Vrcan, Ž.; Lovrin, N.; Križan, B.: *Some Considerations on the Geometry of High Transverse Contact Ratio Internal Involute Gears*, IN-TECH 2011 Proceedings of International Conference on Innovative Technologies, Kudláček, J., Bratislava, 2011., pp. 579-582.
- [8] Vrcan, Ž.; Lovrin, N.; Mrzljak, V.: *Some considerations on the application of Wolfrom planetary gear trains*, XII International Conference on Mechanical Engineering Proceedings 2008, Slovak University of Technology, Bratislava, 2008., pp. III-39-III-41.

- [9] Lovrin, N.; Vrcan, Ž.; Štanfelj, M.: *Importance of Ethics In Engineering Design*, International Scientific Conference - Management of Technology - Step to Sustainable Production, MOTSP 2009. Conference Proceedings, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, Zagreb, 2009., pp. 161-166.
- [10] Lovrin, N.; Vrcan, Ž.; Uršić, V.: *On the Responsibility and Dignity of Engineering Profession*, 4th International Scientific Conference Management of Technology Step to Sustainable Production MOTSP 2012 Conference Proceedings, Croatian Association for PLM, Zagreb, 2012., pp. 448-453.



## PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

### 1. AUTOR

Ime i prezime:

Željko Vrcan

Datum i mjesto rođenja:

9. svibnja 1982, Rijeka

Naziv fakulteta, studija i godina  
završetka diplomskog studija:

Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci,  
Sveučilišni diplomski studij strojarstva, 2006.

Naziv fakulteta, smjera i godina  
završetka poslijediplomskog  
studija:

Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci,  
Konstruiranje u strojarstvu, 2014.

Sadašnje zaposlenje:

Znanstveni novak

### 2. DOKTORSKA DISERTACIJA

Naslov:

Prilog istraživanju nosivosti unutarnjeg evolventnog  
ozubljenja s visokim stupnjem prekrivanja profila

Broj stranica, slika, tablica i  
bibliografskih podataka:

203, 137, 19, 77

Znanstveno polje i grana:

Strojarstvo, opće strojarstvo (konstrukcije)

Voditelji rada:

prof. dr. sc. Neven Lovrin

doc. dr. sc. Robert Basan

Fakultet na kojem je  
rad obranjen:

Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

### 3. OBRANA I OCJENA

Datum prijave teme:

11. rujna 2008.

Datum predaje rada:

2014.

Datum prihvaćanja ocjene rada:

2014.

Sastav Povjerenstva za ocjenu:

prof. dr. sc. Božidar Križan

prof. dr. sc. Neven Lovrin

doc. dr. sc. Robert Basan

izv. prof. dr. sc. Marina Franulović

prof. dr. sc. Milan Opalić

Datum obrane:

2014.

Sastav Povjerenstva za obranu:

Datum promocije:

2014.



Oznaka: DD Tek.broj:

UDK 621.833.16:621.833.15:531.211:620.171.5:519.6(043)

PRILOG ISTRAŽIVANJU NOSIVOSTI UNUTARNJEG EVOLVENTNOG  
OZUBLJENJA S VISOKIM STUPNJEM PREKRIVANJA PROFILA

Željko Vrcan

Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet  
Hrvatska

Ključne riječi: naprezanje u korijenu zuba

naprezanje na boku zuba  
unutarnje ozubljenje  
visoki stupanj prekrivanja profila  
proračun naprezanja  
fotoelastično ispitivanje

Sažetak:

Predstavljen je proračun nosivosti korijena i boka zuba zupčanika s unutarnjim ozubljenjem, ravnim Zubima i visokim stupnjem prekrivanja profila (UVPP) baziran na njihovoj geometriji. Analizirano je naprezanje u korijenu i na boku zuba unutarnjeg ozubljenja metodom konačnih elemenata te su rezultati provjereni fotoelastičnim ispitivanjem. Utvrđena je raspodjela sile u zahvatu zupčanog para s unutarnjim ozubljenjem i predložen novi proračun naprezanja u korijenu i na boku zuba UVPP zupčanika te poboljšanja proračuna prema ISO 6336.

Rad nije objavljen.

Mentor: prof. dr. sc. Neven Lovrin

Komentor: doc. dr. sc. Robert Basan

Povjerenstvo za ocjenu: prof. dr. sc. Božidar Križan

prof. dr. sc. Neven Lovrin

doc. dr. sc. Robert Basan

izv. prof. dr. sc. Marina Franulović

prof. dr. sc. Milan Opalić

Povjerenstvo za obranu:

Datum obrane: \_\_\_\_\_

Datum promocije: \_\_\_\_\_

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.  
(203, 137, 19, 77, hrvatski jezik)

DD

I. Prilog istraživanju nosivosti unutarnjeg evolventnog  
ozubljenja s visokim stupnjem prekrivenja profila  
Klijencne riječi:

1. Prilog istraživanju nosivosti unutarnjeg evolventnog  
ozubljenja s visokim stupnjem prekrivenja profila  
narezanje u korijenu zuba  
narezanje na boču zuba  
narezanje na boču zuba  
visoki stupanj prekrivenja profila  
unutarnje ozubljenje  
narezanje na boču zuba  
narezanje u korijenu zuba  
visoki stupanj prekrivenja profila  
unutarnje ozubljenje  
narezanje na boču zuba  
narezanje u korijenu zuba  
visoki stupanj prekrivenja profila  
prolagun naprezanja  
fotoleastično ispitivanje

Hrvatska

II. Sveučilište u Rijeci  
Tehnički fakultet

I. Vrcan Ž.

Code: DD No.: UDC 621.833.16:621.833.15:531.211:620.171.5:519.6(043)

## A CONTRIBUTION TO THE INVESTIGATION OF THE LOADING CAPACITY OF INTERNAL HIGH CONTACT RATIO INVOLUTE GEARING

Željko Vrcan

University of Rijeka  
Faculty of Engineering  
Croatia

Keywords: tooth root stress  
tooth flank stress  
internal toothing  
high contact ratio  
stress calculation  
photoelastic investigation

### Summary:

A calculation for the load capacity of the gear tooth root and flank of internal high contact ratio spur gears (IHCR) based on their geometry has been introduced. An analysis of gear tooth root and flank stress has been carried out using finite elements and the results checked using photoelastic investigation. The load distribution in the mesh of IHCR gears has been determined and a new root stress calculation for IHCR gears is suggested, as well as improvements to ISO 6336 calculations.

This thesis has not been published.

Mentor: prof. dr. sc. Neven Lovrin  
Co-mentor: doc. dr. sc. Robert Basan

Advisors: prof. dr. sc. Božidar Križan  
prof. dr. sc. Neven Lovrin  
doc. dr. sc. Robert Basan  
izv. prof. dr. sc. Marina Franulović  
prof. dr. sc. Milan Opalić

Reviewers:

Presentation: \_\_\_\_\_ Degree conferred: \_\_\_\_\_

This thesis is deposited in the library of the University of Rijeka, Faculty of Engineering.  
(203, 137, 19, 77, Croatian language)

I Vrćan Ž.

II University of Rijeka Faculty of Engineering Croatia

photoelastic investigation  
stress calculation  
high contact ratio  
internal tooling  
tooth flank stress  
tooth root stress

**Keywords:**

of internal high contact ratio involute gearing

1. A contribution to the investigation of the loading capacity

DD UDC 621.833.16:621.833.15:531.211:620.171.5:519.6(043)